Maandblad voor
de didactiek
van de wiskunde

Orgaan van
de Nederlandse
Vereniging van
Wiskundeleraren

63e jaargang
1987 | 1988
april

Euclides 7

Wolters-Noordhoff

Euclides

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Het blad verschijnt 9 maal per cursusjaar.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Voorzitter Dr Th. J. Korthagen, Torenlaan 12, 7231 CB Warnsveld, tel. 05750-2 34 17.
Secretaris Drs J. W. Maassen, Traviatastraat 132, 2555 VJ Den Haag.
Penningmeester en ledenadministratie F. F. J. Gaillard, Jorisstraat 43, 4834 VC Breda, tel. 076-65 32 18. Giro: 143917 t.n.v. Ned. Ver. v. Wiskundeleraren te Amsterdam.

De contributie bedraagt *f* 55,– per verenigingsjaar; studentleden en Belgische leden die ook lid zijn van de V.V.W.L. *f* 37,50; contributie zonder Euclides *f* 30,–. Adreswijziging en opgave van nieuwe leden (met vermelding van evt. gironummer) aan de penningmeester. Opzeggingen vóór 1 juli.

Artikelen en mededelingen worden in drievoud ingewacht bij drs M. C. van Hoorn, Postbus 9025, 9703 LA Groningen. Zij dienen met de machine geschreven te zijn met een marge van 5 cm en een regelafstand van 1½, bij voorkeur op Euclides-kopijbladen. De redactiesecretaris P.E. de Roest, Blijhamsterweg 94, 9672 XA Winschoten, tel. 05970-2 20 27 stuurt desgevraagd kopijbladen met gebruiksaanwijzing toe. De auteur van een geplaatst artikel ontvangt kosteloos 5 exemplaren van het nummer waarin het artikel is opgenomen.

Boeken ter recensie aan Drs H. Bakker, Jan Steenlaan 11, 8932 EA Leeuwarden, tel. 058-13 59 76.

Inlichtingen over en opgave voor deelname aan de leesportefeuille (buitenlandse tijdschriften) aan F. M. W. Doove, Severij 5, 3155 BR Maasland.
Giro: 1609994 t.n.v. NVvW leesportefeuille te Maasland.

Abonnementsprijs voor niet-leden *f* 48,75. Een collectief abonnement (6 ex. of meer) kost per abonnement *f* 29,50.
Niet-leden kunnen zich abonneren bij:
Wolters-Noordhoff bv, afd. periodieken, Postbus 567, 9700 AN Groningen, tel. 050-22 68 86. Giro: 1308949.
Abonnees wordt dringend verzocht te wachten met betalen tot zij een acceptgirokaart hebben ontvangen.
Abonnementen gelden telkens vanaf het eerstvolgend nummer. Reeds verschenen nummers zijn op aanvraag leverbaar na vooruitbetaling van het verschuldigde bedrag.
Annuleringen dienen minstens één maand voor het einde van de jaargang te worden doorgegeven.
Losse nummers *f* 8,25 (alleen verkrijgbaar na vooruitbetaling).

ISSN 01.65-0394

Jaarrede 1987

Ongeschoolden zijn de kansarmen in de maatschappij.
Om jongeren kansen te bieden zal de overheid er naar moeten streven hen zo veel mogelijk onderwijs te laten genieten.
Gelukkig is ons wiskunde-onderwijs – misschien laat, maar niet te laat – aan het inspelen op de nieuwe eisen die de maatschappij stelt. Nu praktisch alle jongeren wiskunde aangeboden krijgen, blijkt een groot gedeelte van hen voor zijn toekomst het meest gebaat bij een direct bruikbare, levensechte wiskunde.

Naast behoud van het oude – want ook de in abstracte wiskunde geïnteresseerde leerling blijft gelukkig aanwezig – krijgen nieuwe onderwerpen en nieuwe didactieken een kans.
Om in termen van de bouwwereld te spreken: De Hewet is opgeleverd, de Hawex staat in de steigers en de onderbouw bevindt zich op de tekentafel. Met u wil ik het Hewet-bouwwerk bekijken, een wandeling maken op de Hawex-bouwplaats en in de tekenkamers van de Commissie Ontwikkeling Wiskunde-onderwijs kijken.

Door het vele werk van de Hewet-adviescommissie, de Hewet-begeleidingscommissie en vooral ook het Hewet-team, is het nieuwe leerplan wiskunde op alle scholen voor vwo ingevoerd.
Voor het Ministerie van Onderwijs betekent dit dat het karwei klaar is en het Hewet-team en de Hewet-begeleidingscommissie hun werkzaamheden kunnen staken.
Maar kan dit echt al?
Veel vragen zijn nog niet beantwoord en veel andere vragen zijn nog niet eens gesteld. Een evaluatie van de afgelopen jaren heeft nog niet plaats gevonden.

Regelmatig horen wij 'Wiskunde verplicht', maar is het niveau van het huidige leerplan voor iedereen haalbaar?
Wiskunde A moet wel anders, meer praktisch gericht en minder abstract zijn dan de vroegere wiskunde op het vwo, maar mag geen 'gemakkelijker' wiskunde zijn.
In de lyceumnota was sprake van examens op twee niveaus en elke vwo-leerling werd geacht ten minste examen op het lage niveau te kunnen doen, maar inmiddels is deze nota op een zijspoor geplaatst.
Wie gaat zich met dit probleem bezig houden?
Ook het eindexamen wiskunde A roept nog veel vragen op.
In zijn proefschrift 'Wiskunde, Inzicht en Betekenis' schrijft Jan de Lange:
'De zorgen voor het vak Wiskunde A weerspiegelt zich in de zorg voor het landelijk examen. Het examen voldoet in vrijwel geen enkel opzicht aan de principes die wij ons bij het ontwikkelen van goede toetsen voor Wiskunde A hebben gesteld. Gevreesd moet worden dat het examen in de huidige vorm een slechte invloed zal hebben op het vak Wiskunde A zoals in deze studie beschreven.'
De Hewet-begeleidingscommissie had haar zorgen over de inhoud van het eindexamen en vroeg zich af of het examen weer een stramien zal worden. De examenmakers en de CEVO zijn echter weer gebonden aan een bestaande vorm van examen met de daarin gegroeide tradities en moeten zorgen voor een examen dat leidt tot objectieve scores.
Jan de Lange wijdt in zijn eerder genoemde proefschrift enige hoofdstukken aan toetsen en alternatieve toetsen. Ook een door het CITO ingestelde commissie houdt zich bezig met verscheidene vormen van toetsing. Het werk hier is dus nog lang niet klaar!
Ook de hulp aan de docenten mag nog niet ophouden.

Velen werken met plezier aan wiskunde A en doen dit zeer goed, anderen staan zeer positief tegenover wiskunde A maar voelen zich nog steeds onzeker en missen – naar eigen zeggen – de fantasie of kundigheid om zelf realistische problemen te bedenken die

zij aan leerlingen voor kunnen leggen.
Hiernaast zijn er ook docenten die wiskunde A helemaal niets vinden, het eigenlijk geheel niet zouden willen onderwijzen, maar er toch toe verplicht worden.
De nascholingscursussen van de afgelopen jaren vragen om een vervolg. Deze vervolgcursussen moeten echter niet alleen georganiseerd worden maar ook bezocht kunen worden. Zonder voldoende faciliteiten is het voor docenten die 29 uren per week les moeten geven in klassen van soms 34 leerlingen moeilijk om nog enthousiasme op te brengen voor nascholingscursussen. En zonder die cursussen is het voor velen bijna ondoenlijk goed wiskunde A te geven.
Kortom, faciliteiten voor nascholing zijn hard nodig!

Na jaren van voorbereiding is nu eindelijk de Hawex van start gegaan. Drie scholen zijn dit jaar begonnen met een nieuw leerplan in de vierde klas. Volgens de circulaire van april zullen circa 20 scholen volgend jaar volgen en moet over twee jaren heel Nederland in de vierde klas met het nieuwe leerplan gaan werken.
Zoals u in het septembernummer van 'Euclides' hebt kunnen lezen, heeft het bestuur een brief aan de staatssecretaris gezonden met het verzoek het tijdschema van de circulaire wat ruimer te stellen. Sinds gisteren weten we dat aan dit verzoek gevolg zal worden gegeven. De drie koplopende scholen zullen niet volgend jaar, doch pas over twee jaren door 22 scholen worden gevolgd, waarna over drie jaren alle scholen in de vierde klas met het nieuwe leerplan moeten gaan werken.
Toch doet de gehele aanpak van de invoering erg denken aan hollen of stilstaan; hollen als het veld iets moet doen en stilstaan als de volgende zet weer aan het ministerie is.
Nadat diverse organisaties, waaronder ook onze vereniging, kandidaten voor de Hawex-commissie hadden ingediend, duurde het ongeveer een half jaar voordat de commissie op 1 februari 1984 aan het werk kon. De commissie kreeg voor haar werk anderhalf jaar de tijd. In mei 1985 bracht de commissie een tussentijds rapport uit dat binnen vier (!) maanden door het ministerie aan alle scholen werd toegezonden. Binnen één maand organiseerde onze vereniging hoorzittingen en vier maanden daarna verscheen in januari 1986 het eindrapport van de commissie, waarin de resultaten van de hoorzittingen waren verwerkt. Pas ongeveer een jaar hierna werd het groene licht voor de invoering van het nieuwe leerplan gegeven en kregen drie scholen in januari van dit jaar het verzoek om in augustus met een nieuw leerplan te gaan werken. Nu ging alles snel (!), want 'reeds' in april werden ook de andere scholen op de hoogte gesteld van de invoering en werden kandidaatscholen gevraagd om met de tweede ronde mee te gaan doen. Ons dringend verzoek aan de Staatssecretaris is om er voor te zorgen dat in de toekomst de ambtelijke molen veel sneller draait en de tijd die daardoor vrij komt te gebruiken voor een rustiger invoering van nieuwe leerplannen.
Het bestuur is verheugd dat een goede nascholing voor docenten is toegezegd, maar dringt er wel op aan dat ook de berichtgeving over ervaringen en resultaten aan de experimenteerscholen op ruime schaal zal plaats vinden. Wij denken hierbij vooral aan 'Euclides' en de 'Nieuwe Wiskrant'.
Wij hopen dat het hoger beroepsonderwijs voldoende op de hoogte gebracht wordt van de veranderingen in het leerplan en dat het hbo ook snel zal inspelen op deze veranderingen opdat niet, zoals de Hewet-leerlingen aan de universiteiten de eerste jaren in de kou stonden, ook de leerlingen van de experimenterende havo-scholen de komende jaren onvoorbereid ontvangen worden.

De Commissie Ontwikkeling Wiskunde-onderwijs – in de wandelgangen Commissie Van der Blij genaamd – is aan het begin van dit kalenderjaar enthousiast en voortvarend begonnen. Het eerste rapport, met goede inhoudelijke plannen, is reeds verschenen. Belangrijk is dat de commissie zorgt voor goede berichtgeving naar de docenten. 'Euclides' en de 'Nieuwe Wiskrant' zullen zeker voor haar berichtgeving plaats inruimen.
Helaas moet de commissie zich nu reeds grote zorgen maken over de nascholing. Het blijkt namelijk dat er geen gelden beschikbaar komen voor de nascholing voordat de formele goedkeuring van het voorstel voor een nieuw leerplan is gegeven. Let wel, het gaat om een leerplan, niet een projectplan. De goedkeuring kan pas komen nadat het voorstel is ingediend, dat wil zeggen in 1992. En dan ook pas nadat allerlei groeperingen, zoals de Onderwijs-

raad, er advies over hebben uitgebracht. Op die manier kan er pas op zijn vroegst in 1993 extra geld voor nascholing komen. Met de commissie vinden wij dat veel te laat.
Door de commissie werd al om extra geld voor nascholing op korte termijn gevraagd, maar de vertegenwoordiger van het ministerie maakte de commissie duidelijk dat de minister daar niet op in zou kunnen gaan.
In deze omstandigheden wordt het dus geheel aan de lerarenopleidingen overgelaten hoeveel geld uit hun nascholingsbudget zij willen en kunnen besteden aan de nascholing in het kader van de toekomstige ontwikkelingen van het wiskunde-onderwijs. Over deze ontwikkelingen mogen wij niet te gering denken. Ze zijn revolutionair in de ware zin van het woord en het is nodig dat vele duizenden wiskundeleraren daar goed op worden voorbereid.

In afwachting van de realisering van deze plannen moeten wij nog zó lang met het huidige leerplan en de huidige examenvormen voor lbo en mavo leven dat we ons zorgen moeten maken over de verandering die dit jaar in het eindexamen heeft plaats gevonden. Het gaat over het eindexamen in één zitting, waarbij de gesloten vragen ten minste 70% van het examen moeten uitmaken.
Na het examen wiskunde voor lbo en mavo in mei van dit jaar heeft de vereniging vragenlijsten voorgelegd aan docenten en leerlingen. In totaal zijn er door ongeveer 60 docenten 287 leerlingen geënquêteerd en hebben 417 docenten de vragenlijsten ingevuld.

De resultaten van dit onderzoek zult u in het januari-nummer van 'Euclides' kunnen aantreffen.
Belangrijke constateringen zijn:
- meerkeuzevragen voor wiskunde moeten door leerlingen met een andere strategie worden beantwoord dan meerkeuzevragen voor andere vakken. Wordt bij de talen gevraagd om uit de alternatieven het goede of het beste antwoord te kiezen, bij wiskunde wordt van de leerlingen gevraagd elke opgave eerst uit te werken en pas dan te kijken welk alternatief bij het gevonden antwoord behoort. Het lijkt ons moeilijk voor leerlingen om bij één vak een andere strategie toe te passen dan bij alle overige vakken.
- bij ongeveer de helft van de docenten blijkt de nieuwe verdeling van open en gesloten vragen van invloed op de wijze van lesgeven, omdat men zich nu meer op de gesloten vragen richt.

De Staatssecretaris heeft opdracht gegeven aan het CITO en de Stichting Centrum voor Onderwijsonderzoek om voor enige vakken een onderzoek in te stellen naar de gevolgen van het invoeren van de 70/30 maatregel bij de eindexamens voor mavo en lbo. Omdat wiskunde niet is opgenomen bij de vakken die voor een diepgaand onderzoek in aanmerking komen, heeft het bestuur aan de Staatssecretaris gevraagd ook wiskunde in dit onderzoek op te nemen en hierbij gebruik te maken van de enquête en de brieven over de 70/30 maatregel, die het bestuur het afgelopen jaar van u heeft ontvangen.
Moest ik u vorige jaren soms negatieve geluiden laten horen omdat er in ons onderwijs van alles diende te gebeuren, er weinig gebeurde en wat er gebeurde ons niet aanstond, dit jaar kan mijn verhaal veel positiever zijn, want afschoon ik u een lijst van knelpunten heb voorgelegd, zijn dit toch knelpunten binnen een ontwikkeling die wij reeds jaren voorstonden en die nu vorm gaat krijgen.

Van belang bij deze ontwikkeling is dat de voorlichting aan de docenten optimaal is. Gelukkig mag ik u vertellen dat ons verenigingstijdschrift 'Euclides' dit jaar met een nieuwe redactie voortvarend aan de slag is gegaan. Wij hopen dat de problemen die vorig jaar optraden nu geheel achter ons liggen. Het bestuur is vooral Fred Goffree bijzonder erkentelijk voor zijn inzet door vorig jaar 'Euclides' door een impasse heen te helpen. Door zijn bijzonder grote inzet heeft 'Euclides' het hoofd boven water weten te houden en het is vooral aan hem te danken dat 'Euclides' voortvarend aan een nieuwe jaargang kon beginnen.
Het is in dit verband passend om op te merken dat het 'Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde', het tijdschrift waarvan 'Euclides' een telg is en dat voor velen van ons tijdens onze opleiding van grote betekenis was, dit jaar vijfenzeventig jaar bestaat.

Dames en Heren, ik ben deze jaarrede begonnen met termen uit de bouwwereld om de situatie binnen het wiskunde-onderwijs te beschrijven.
Ik wil deze jaarrede besluiten met de wens uit te

spreken dat er over enige jaren geen parlementaire enquête-commissie nodig zal zijn om een onderzoek naar het huidige beleid te verrichten.

Hiermee verklaar ik deze jaarvergadering voor geopend.

Notulen van de algemene vergadering van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren op zaterdag 31 oktober 1987 in het gebouw van Het Nieuwe Lyceum te Bilthoven.

Om 10.05 uur opent de voorzitter, dr. Th. J. Korthagen, de vergadering. Hij heet in het bijzonder welkom de ereleden prof. dr. H. Freudenthal, dr. J. van Dormolen, dr. P. G. J. Vredenduin en E. H. Schmidt, de inspecteur drs. W. Kleijne, de vertegenwoordiger van de NVORWO de heer W. Uittenbogaard, de hoofdredacteur van Euclides de heer drs. M. C. van Hoorn en de vertegenwoordigers van de Vlaamse Vereniging voor Wiskundeleraars mevrouw L. Simons en de heren F. Laforce en A. Schoeters.
Hierna spreekt de voorzitter de jaarrede uit. Deze is in Euclides opgenomen. Na de jaarrede licht de voorzitter de rol van prof. dr. F. Goffree tijdens de moeilijke tijd voor Euclides nog toe. Het bestuur is hem zeer erkentelijk hiervoor en onderschrijft dit met een geschenk onder couvert. Vervolgens worden de notulen van de algemene vergadering van 25 oktober 1986 en de jaarverslagen goedgekeurd.
Naar aanleiding van de begroting voor het jaar 1987/1988 informeert de heer J. J. Sloff naar het tekort van *f*3400,–. Het is hem opgevallen dat de kosten voor de ledenvergadering en de studiedagen is begroot op *f*9000,–, terwijl deze vorig jaar slechts *f*3552,38 bedroegen. De penningmeester geeft als verklaring dat vorig jaar de studiedag door zeer veel niet-leden is bezocht waardoor de inkomsten van deze dag extra hoog waren.
Het verslag van de kascommissie wordt voorgelezen en hierna wordt de penningmeester gedéchargeerd. Vervolgens worden in de nieuwe kascommissie benoemd de heer drs. S. Garst uit Oude Tonge en mevrouw N. B. Sies-Oosterveld uit Delft.
De voorzitter gaat hierna over tot de bestuursverkiezing. Van de aftredende bestuursleden is de heer L. Bozuwa niet herkiesbaar. Daar er geen tegenkandidaten zijn ingediend worden de heren dr. Th. J. Korthagen en drs. J. W. Maassen herkozen en wordt als nieuw bestuurslid gekozen mevrouw H. Goemans-Wallis uit Tiel. De contributie voor het jaar 1988/1989 wordt vastgesteld op *f*55,–. De voorzitter vraagt nu aandacht voor de problemen die rijzen doordat in een circulaire van de staatssecretaris wordt verboden dat bij de correctie van examenwerk op het werk onvolkomenheden worden aangegeven. De voorzitter stelt voor over dit punt een motie aan de staatssecretaris te zenden.
Als tekst legt hij de vergadering voor:

MOTIE:
De Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren, in vergadering bijeen, heeft kennis genomen van de beslissing dat op het examenwerk van leerlingen met ingang van 1988 geen onvolkomenheden meer door de corrector mogen worden aangegeven.
De vergadering is van mening dat hierdoor de kwaliteit van de correctie wordt aangetast en een goed overleg tussen de eerste en tweede corrector ernstig wordt belemmerd.
Zij verzoekt de staatssecretaris deze beslissing vóór het komend eindexamen te herzien en gaat over tot de orde van de dag.
In de discussie over deze motie vraagt de heer L. A. G. M. Muskens of inderdaad de kwaliteit van de correctie wordt aangetast of dat het om de overlast gaat die docenten door deze maatregel gaan ondervinden. De heer P. E. de Roest informeert over welke circulaire het gaat. Volgens de secretaris gaat het om de circulaire waarvan te verwachten is dat hij wordt ingetrokken. Het ziet er echter naar uit dat in een vervangende circulaire de maatregel behouden zal blijven. De heer L. Jacobs meent dat met 'overlast' het belang van de docenten wordt gediend, doch met 'kwaliteit' het belang van de leerlingen. De heer drs. H. G. B. Broekman denkt dat het weglaten van aantekeningen op het werk de objectiviteit van de boordeling gevaar gaat lopen. De secretaris stelt voor om in de vergadering geen motie aan te nemen maar het bestuur te verzoeken om namens de vergadering een brief aan de staatssecretaris te zenden indien blijkt dat in de vervangende circulaire de voorgestelde maatregel weer is opgenomen. De heer drs. A. van Streun wil niet op de nieuwe circulaire wachten. Het lijkt hem verstandiger de staatssecretaris op de hoogte te stellen van ons verzoek vóórdat zij de nieuwe circulaire doet uitgaan. In een verdere discussie blijkt de vergadering de voorkeur te geven aan een motie van de ledenvergadering boven een brief van het bestuur. De voorzitter stelt voor om in de rondvraag op de motie terug te komen om het bestuur de mogelijkheden te bieden de tekst van de motie aan de wensen van de vergadering aan te passen.
Als slot van het eerste deel van de huishoudelijke vergadering richt de voorzitter het woord tot het vertrekkende bestuurslid, L. Bozuwa. De heer Bozuwa heeft veel voor de vereniging gedaan. Hij heeft een grote kennis van het onderwijs en heeft deze ten dienste van de vereniging gesteld. Binnen het bestuur had hij een centrale plaats en groot gezag, zo ook in de vriendenkring die het bestuur vormt. De contacten met het bestuur zullen zeker niet verloren gaan en het bestuur hoopt de heer Bozuwa nog vaak terug te zien. Om 10.42 uur sluit de voorzitter het eerste gedeelte van de huishoudelijke vergadering en geeft het woord aan de heer dr. J. van Dormolen om uiteen te zetten hoe het gedeelte 'studiedag' zal verlopen.
Na de studiedag wordt om 16.40 uur het huishoudelijk gedeelte heropend met de rondvraag. Deze rondvraag staat onder leiding van de vice-voorzitter L. Bozuwa.

De heer Bozuwa komt allereerst terug op het onderwerp 'motie' van het ochtendgedeelte van de huishoudelijke vergadering. Het bestuur vindt het erg moeilijk om de tekst van de motie zo te wijzigen dat alle aanwezigen zich hier geheel in kunnen vinden terwijl de motie toch kort en zakelijk blijft. Hij stelt daarom de vergadering voor de tekst ongewijzigd te laten, doch de motie in een brief aan de staatssecretaris aan te bieden en in de brief een toelichting op de motie te geven. Dit betekent dan wel dat de brief pas over ongeveer veertien dagen verzonden zal worden omdat het bestuur zich over de tekst van de toelichting moet buigen.
De heer T. Vandeberg verzoekt ook de taakverzwaring voor de docenten in de brief op te nemen. De heer Van Dormolen vraagt zich af waarom de maatregel wordt genomen. Als het is om fraude te voorkomen dan heeft de maatregel geen zin. De heer Bozuwa denkt dat de maatregel genomen wordt om beïnvloeding van de tweede door de eerste corrector te voorkomen.
De vergadering besluit vervolgens tot aanneming van de motie en tot aanbieding van de motie met begeleidende brief aan de staatssecretaris.

De heer M. Kindt komt terug op een passage in de jaarrede van de voorzitter. In de jaarrede wordt gesuggereerd dat de financiering van de nascholing voor de HAWEX geen problemen zal opleveren. Er blijken echter wel problemen te zijn. De initiële opleidingen krijgen geld om nascholing te verzorgen en zij bepalen welke nascholingen er komen. Er is dus geen garantie dat er ook nascholing voor HAWEX komt. De heer Muskens adviseert hierover contact op te nemen met het Landelijk Werkverband Nascholing Wiskunde. De heer Bozuwa voegt hieraan toe dat de vraag om nascholing vanuit het veld moet komen; wij zijn het veld en moeten dus veel gaan vragen. De heer Van Dormolen heeft de stukjes van de heer Bozuwa in Euclides 'Van de bestuurstafel' zeer gewaardeerd. Hij hoopt dat met het vertrek van de heer Bozuwa uit het bestuur geen einde komt aan deze stukjes. De heer Bozuwa deelt mede dat de heer L. Jacobs zijn taak zal overnemen.

De heer Van Dormolen komt ook nog terug op de nascholing. Als de overheid in gebreke blijft bij de nascholing dan moeten wij proberen dit zelf te doen. Hiervoor kan de vereniging putten uit het Fonds Bijzondere Publikaties.
Ook de heer J. Sloff komt nog terug op de nascholing. Hij adviseert het bestuur te kijken naar de regionale studiedagen in Vlaanderen. Voor het Noorden – en misschien ook voor het Zuiden – is de afstand tot het centrum groot. Regionale bijeenkomsten zullen hier zeer op prijs worden gesteld.
De heer Bozuwa constateert dat de ervaringen met regionale werkgroepen niet erg bemoedigend zijn, maar misschien moeten we nog duidelijker naar het veld overbrengen hoe revolutionair de ontwikkelingen zijn.
De heer Sloff vraagt ook de mening van het bestuur over de symboliek in het wiskunde-onderwijs. De ontwikkeling van de symboliek is een van de grote krachten in de wiskunde. Hoe kijkt het bestuur hier, mede gezien het rapport van de nomenclatuurcommissie, tegenaan?
De heer Bozuwa belooft dat het bestuur hierop terug zal komen.
De heer A.J. Pach vraagt of het ook tot de taak van de Nederlandse Vereniging van Wiskunde behoort zich te bemoeien met het meao en zich bezig te houden met het programma voor wiskunde en de examens wiskunde waar steeds iets mee mis is.
De heer Bozuwa zegt dat het probleem ligt in de organisatie van het mbo. Het is voor onze vereniging erg moeilijk hiermee contact te krijgen. Misschien kan dit via de commissie Ontwikkeling Wiskundeonderwijs. Ook de HAWEX heeft er toe geleid dat de contacten met het hbo beter werden.
Mevrouw L. Simons wenst de vereniging namens de Vlaamse Vereniging voor Wiskundeleraars een prettig en voortvarend nieuw verenigingsjaar toe. Zij bedankt voor de gastvrijheid op deze dag en zegt genoten te hebben van wat zij deze dag heeft meegemaakt.
De heer Bozuwa memoreert dat de besturen van NVvW en VVWL onlangs in Dordrecht bij elkaar zijn geweest. Hier is de vraag gesteld hoe de contacten, die reeds goed zijn, nog kunnen worden verbeterd. Er gaat een commissie aan het werk die de contacten moet bevorderen. De heer T. Vandeberg informeert naar de leerstof differentiaalvergelijkingen. Hoe is het met het resultaat van de werkgroep differentiaalvergelijkingen? De heer Kindt antwoordt dat de werkgroep niet klaar is. Er is een brief van de CEVO op komst over de inhoud van differentiaalvergelijkingen op korte en iets minder korte termijn.
Om 17.00 uur sluit de vice-voorzitter de vergadering. Hij wenst alle aanwezigen een goede thuisreis en een goed schooljaar toe.

Tweede tussenrapport van de Nomenclatuurcommissie

In het volgende stuk treft u de voorstellen aan voor de nomenclatuur voor de eindexamenopgaven ruimtemeetkunde wiskunde B.
Schriftelijke reacties kunnen worden gericht aan de heer Th. J. Korthagen, Torenlaan 12, 7231 CB Warnsveld, tot uiterlijk 2 maanden na het verschijnen van dit nummer van Euclides. Tot die datum kunnen ook reacties op het eerste tussenrapport, Euclides 62-8 worden ingestuurd.

Voorstellen bij de ruimtemeetkunde wiskunde B

Uitgangspunt

Veel termen en notaties uit de ruimtemeetkunde zijn ontleend aan de vlakke meetkunde en deze behoeven geen nadere toelichting. Alleen termen en notaties, die in de praktijk niet duidelijk blijken te zijn, worden nader besproken.
De voorkeur van de commissie gaat uit naar omschrijvingen, die zo goed mogeljk aansluiten bij de omgangstaal.

Opdrachten

De opdrachten 'Teken', 'Construeer', 'Bewijs', 'Toon aan', 'Beredeneer' en 'Bereken' blijken op verschillende manieren te worden geïnterpreteerd.
De commissie stelt voor om op de examens alleen de volgende formuleringen te gebruiken:

- 'Teken...'; eventueel aan te vullen met 'geef aan hoe...'.
- 'Bereken...'; die vereist altijd een berekening.
- 'Toon aan...'; dit kan met een berekening en/of redenering.

De opdracht 'Construeer' wordt geassocieerd met de klassieke passer-en-liniaal-constructies, wat niet de bedoeling is. 'Bewijs' wordt in de wiskunde met een strenge logische redenering verbonden. 'Toon aan' daarentegen is minder beladen en laat verschillende wegen open. Als een redenering of een berekening wordt bedoeld, kan dat expliciet in de opdracht worden opgenomen: 'Toon door een berekening aan...'

Voorzetsels

Enkele gangbare formuleringen sluiten niet goed aan bij de omgangstaal. Ons voorstel is om de volgende omschrijvingen te gebruiken:

- 'de hoek **tussen**...' in plaats van 'de hoek van...'
  We zeggen: 'de hoek **tussen** twee lijnen' en 'de hoek **tussen** een lijn en een vlak'. Een alternatief voor de laatste uitdrukking is: 'de hoek, die een lijn met een vlak maakt'.
- 'de afstand **tussen** een ... en een ...' of 'de afstand **van** een ... **tot** een ...' in plaats van 'de afstand van een ... en een ...'.
  We zeggen: 'de afstand **tussen** twee punten'; 'de afstand **van** een punt **tot** een lijn' of 'de afstand **tussen** een punt en een lijn'
- 'de lijn k ligt **in** het vlak V' in plaats van 'het vlak V gaat door de lijn k'
  We zeggen: 'Het vlak waarin punt P en lijn k liggen.'

De hoek tussen twee vlakken

De hoek tussen twee lijnen is in het vigerende nomenclatuurrapport gedefinieerd als de niet-stompe hoek. Analoog kan de hoek tussen twee vlakken worden gedefinieerd als de niet-stompe hoek.
In de vlakke meetkunde is het duidelijk wat we verstaan onder de hoeken van een veelhoek. In ruimtelijke figuren ontstaan er misverstanden als we vragen naar de hoek tussen twee grensvlakken. Om dit te voorkomen beperken we ons tot grensvlakken die een ribbe gemeen hebben. Onder de hoek tussen twee grensvlakken verstaan we de hoek **binnen** het lichaam. Deze kan dus ook stomp zijn.

Teken op ware grootte

Onder de opdracht 'Teken op ware grootte' wordt verstaan: 'Teken in de werkelijke vorm'. Daarbij moet in de gehele opgave dezelfde eenheid gebruikt worden, tenzij anders vermeld.

Vectoren met kentallen

De commissie is verdeeld over de wenselijkheid om vectoren met kentallen aan te geven door een verticale-kolomvector of door een horizontale coördinaattripel. Men kan vectoren gewoon opvatten als een rijtje getallen, bijvoorbeeld een coördinatenrijtje. Dat pleit voor de notatie (..,..,..). De schrijfwijze als kolomvector sluit aan bij het gebruik in de onderbouw en bij het gebruik in de natuurkunde.
Voor de formulering van examenopgaven is dit didaktisch meningsverschil niet van belang, omdat de commissie van oordeel is dat – gezien het karakter van het ruimtemeetkunde programma – geen van beide notaties in examenopgaven behoren voor te komen.

Doorsnede

- De term 'doorsnede' is op zich niet helder, maar wordt door het veelvuldig gebruik een vakterm, die geen misverstand veroorzaakt.

Meetkunde in de brugklas

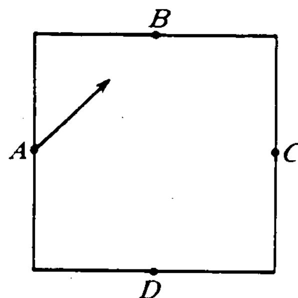
Fernand J. Prevost

Het model van Van Hiele voor het leren van meetkunde geniet tegenwoordig zowel praktische als wetenschappelijke belangstelling. Hoffer (1981) geeft een beschrijving van het model en van problemen die voorkomen bij leerlingen, op alle Van Hiele-niveaus.
De eerste drie niveaus zullen in dit artikel worden behandeld. Deze niveaus zijn, zoals Hoffer ze noemt: *herkenning, analyse* en *ordening*.

Onder *herkenning* wordt verstaan: de vaardigheid om eenvoudige meetkundige figuren te benoemen en te (her-)kennen. De leerling kan een rechthoek herkennen, rechthoeken onderscheiden in een verzameling figuren en voorbeelden van rechthoeken herkennen in gebouwen, en in andere situaties uit de werkelijkheid.
Analyse bestaat uit het bestuderen van een bepaalde figuur en het opmerken van zijn eigenschappen. De leerling zal dan in staat zijn te vertellen dat een rechthoek vier zijden heeft, rechte hoeken, overstaande zijden die evenwijdig zijn, en diagonalen die elkaar middendoor delen. Op dit tweede niveau zien leerlingen echter niet hoe de ene figuur in relatie staat tot de andere.
Op het derde niveau, dat van de *ordening*, beginnen leerlingen verbanden te zien, een systeem op te bouwen, en het gebruik van definitities te waarderen. Op dit niveau begrijpt een leerling dat een vierkant een rechthoek èn een ruit is, en dat rechthoeken en ruiten voorbeelden zijn van vierhoeken. Terwijl een leerling die op een lager niveau zit misschien een beschrijving van een rechthoek zou kunnen geven, is hij of zij nu in staat een definitie te geven, zoals bijvoorbeeld: 'Een rechthoek is een parallellogram met een rechte hoek'.
Usiskin (1982) stelde vast dat een aantal vierdejaars middelbare scholieren er niet in slaagde de vaardigheden van het eerste niveau te tonen.
Deze leerlingen kunnen eenvoudige meetkundige figuren als vierkanten, driehoeken, rechthoeken of cirkels niet herkennen. En verder wijst Usiskins studie uit dat leerlingen die nog niet verder gekomen zijn dan het derde niveau, slechts 50% kans op succes hebben in een meetkunde-cursus die voor het overgrote deel bestaat uit het kunnen geven van bewijzen.
We kunnen vaststellen dat veel van onze leerlingen een formele behandeling van de meetkunde op de middelbare school niet kunnen volgen. Het argument om meetkunde in de wiskunde van de brugklas op te nemen moet daarom niet louter zijn 'dat het later nodig is'. Het model van Van Hiele suggereert, en de studie van Usiskin ondersteunt dat in het algemeen, dat leerlingen geen profijt kunnen trekken uit een les van een niveau dat boven hun vermogen ligt. En dus zou meetkunde-onderwijs in de brugklas rekening moeten houden met de noodzaak om de meetkundige basisfiguren te *herkennen*, voordat er verder gegaan wordt met *analyseren* respectievelijk *ordenen*.

Herkenning

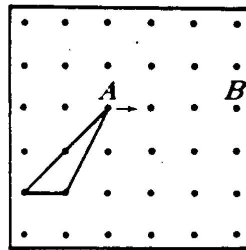
We kunnen ons moeilijk voorstellen dat brugklasleerlingen en zelfs tweedeklassers op de middelbare school niet in staat zijn eenvoudige meetkundige figuren te herkennen. Laten we echter eens kijken naar de vragen bij de figuren 1, 2, 3 en 4.



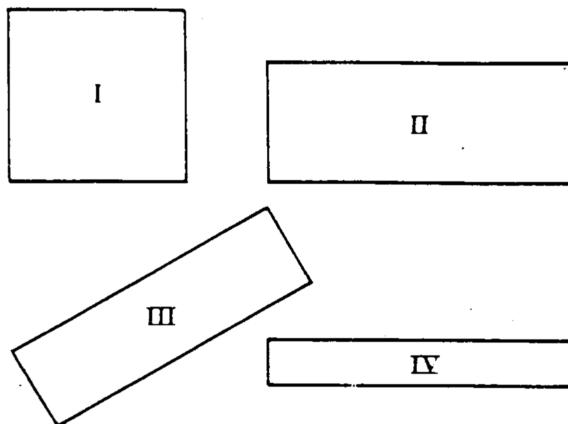
Figuur 1. Dit is een vierkant. De punten A, B, C en D zijn de middens van de zijden. Verbind A met B, B met C, en zo verder. Hoe heet figuur ABCD?

Als antwoord op de vraagstelling bij figuur 1 zeggen veel leerlingen dat *ABCD* geen vierkant is – misschien wel een ruit, maar geen vierkant.
Sommigen voelen niet aan dat het resultaat in figuur 2 een driehoek is, en van figuur 3 zeggen sommigen dat I eerder een vierkant is dan een rechthoek, en dat III 'anders' georiënteerd is en er niet uitziet als een rechthoek, en dat IV te smal is om voor een rechthoek door te gaan.
In figuur 4 is III wellicht geen trapezium, IV is meestal geen trapezium, en V is absoluut geen trapezium.
Zulke antwoorden zijn typerend voor een bepaald deel van de leerlingen die net een jaar meetkunde hadden gehad. Het gaat hier om leerlingen die tijdens de zomer nog meetkunde volgden, omdat ze een meetkunde-taak hadden (in de VS is zoiets niet ongebruikelijk, redactie). Aangezien de meesten niet in staat waren deze eenvoudige figuren te herkennen, hadden ze niet de vaardigheid om het meetkunde-programma van het voorafgaande jaar succesvol af te ronden.

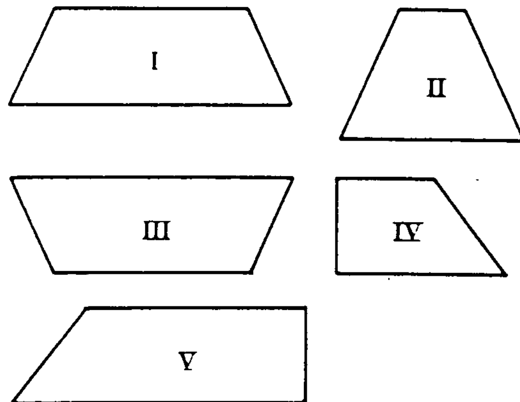
Dit is in overeenstemming met de resultaten van Usiskins onderzoek (1982). Bijna al deze leerlingen konden de definities die ze het voorafgaande jaar hadden geleerd weer oplepelen. Hun werkdefinitie was echter: 'ziet er uit als'. Als de figuur ongewoon georiënteerd was, of totaal anders was dan wat ze eerder gezien hadden, dan was de figuur er niet eentje die 'er uit ziet als' (zie Burger (1981)).
Wij, leraren, zijn schuldig aan het aanmoedigen van het gebruiken van deze 'ziet er uit als'-definities. We tekenen de figuren stereotiep, met één zijde evenwijdig aan de onderkant van het papier of het schoolbord. Ook gebruiken we te weinig hulpmiddelen die de leerlingen de gelegenheid bieden zelf met meetkunde bezig te zijn in plaats van meetkunde passief te aanschouwen.
Probeer een paar activiteiten als bij de figuren 1 tot en met 4, en als de resultaten zijn zoals hiervoor beschreven is, laat de leerlingen de diverse figuren dan construeren met behulp van spijkerborden, rietjes, pijperagers, of andersoortig materiaal. De leerlingen zouden ook aangemoedigd moeten worden figuren te tekenen met potlood en liniaal. Aan zulke tekeningen is te zien of leerlingen een beperkt 'ziet er uit als'-begrip hebben, of een meer globaal idee van een figuur.



Figuur 2. Construeer een driehoek op een spijkerbord zoals in de figuur te zien is. Verschuif nu hoekpunt A één stap naar rechts. Is de figuur die je krijgt een driehoek? (ja)
Verschuif hoekpunt A nog een stap naar rechts. Verschuif het hoekpunt tenslotte naar B. Is de figuur nu een driehoek?



Figuur 3. Welke van deze figuren zijn rechthoeken?



Figuur 4. Zijn al deze figuren trapezia?

Laten we aannemen dat de leerlingen de fase van de *herkenning* bereikt hebben. Ze laten zien dat ze in staat zijn doodgewone figuren te benoemen, te herkennen en te tekenen. Ze zijn dan klaar om door te gaan naar het tweede niveau, dat van de *analyse*.

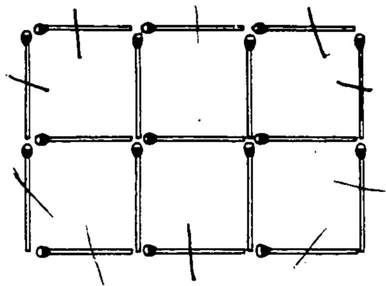
Het analyseren van eigenschappen van figuren

We zouden het meetkunde-programma eens kunnen laten beginnen met het probleem van figuur 5.

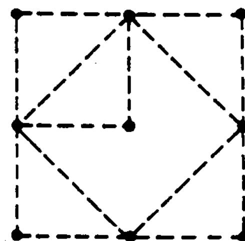
Het is zeer waarschijnlijk dat leerlingen het antwoord toevallig zullen vinden. Daarna kunnen we hen het probleem nog eens laten beschouwen:

Hoeveel lucifers zitten er in de oorspronkelijke figuur? (17)
Als je 5 lucifers weg laat, hoeveel hou je dan over? (12)
Hoeveel zijden heeft een vierkant? (4) En hoeveel zijden hebben drie vierkanten? (12)
Kunnen twee vierkanten nog een gemeenschappelijke zijde hebben? (nee)
Hieruit volgt dat de drie vierkanten die overblijven alleen hoekpunten gemeen kunnen hebben.
Zie je twee oplossingen? Is de ene oplossing het spiegelbeeld van de andere?

Met behulp van dit probleem hebben we de begrippen zijde en hoekpunt, en een beschouwing over de grondeigenschappen van de figuren geïntroduceerd. Deze start heeft ook het voordeel spiegelbeelden en symmetrie te introduceren.
Als onze leerlingen deze vragen leuk vinden, kunnen we hen aanmoedigen verder te gaan met puzzels zoals op het werkblad 'Enige opgaven over vierkanten' staan. Voor ieder probleem zouden ze vragen moeten doornemen die hen helpen terug te blikken (het werkblad is als bijlage bij dit artikel gevoegd).
Als de leerlingen zijn aangemoedigd om de eigenschappen die ze van het vierkant ontdekten op te schrijven, zijn ze vervolgens in staat in kleine groepen de eigenschappen van rechthoek, parallellogram, ruit en trapezium te vinden. U kunt ook enkele van de volgende oefeningen gebruiken om hen te helpen met het onderzoek (zie figuur 6).



Figuur 5. Verwijder vijf lucifers zó dat er drie vierkanten over blijven, die dezelfde grootte hebben als de vierkanten in het plaatje.



Figuur 6. Construeer een vierkant op een spijkerbord van 3 bij 3 of op roosterpapier. Construeer een ander vierkant dat verschillend is van het eerste. Kun je nu een derde vierkant vinden dat verschillend is van de eerste twee?

Kijk eens naar het vierkant dat je gemaakt hebt; hoeveel zijden heeft het? Elke hoek wordt een hoekpunt genoemd; hoeveel hoekpunten heeft een vierkant? Wat kun je nog meer zeggen over een vierkant?
Beschrijf een vierkant (merk wel op dat in deze les niet gevraagd wordt naar een definitie).

Ga door met het onderzoek van het vierkant. Introduceer diagonalen en laat de leerlingen hierover zelf tot conclusies komen. Introduceer het begrip congruentie en vraag de leerlingen om congruente lijnstukken in een vierkant te herkennen.
Bezitten de diagonalen opvallende eigenschappen?

Ga door met de begrippen hoek en rechte hoek, en laat de leerlingen deze begrippen toevoegen aan hun eerder gegeven beschrijving van een vierkant. Desgewenst kunt u in deze fase ook nog evenwijdigheid en loodrechte stand van lijnen behandelen. Binnen de context van het uitpluizen van àlle eigenschappen van het vierkant kunnen de meeste, zo niet alle, basisbegrippen van de brugklas-meetkunde worden geïntroduceerd – en dat dan doelgericht. Zo kunnen ook de basisconstructies worden geïntroduceerd, zodanig dat de leerling een vierkant zelf kan tekenen. En tenslotte, als u de beschikking heeft over een microcomputer en de computertaal LOGO, kunt u de leerlingen inleiden in deze taal.

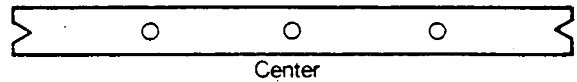
Herhaal de zojuist beschreven gang van zaken met rechthoeken, ruiten, parallellogrammen en trapezia. Het komt er op aan dat leerlingen zelf figuren construeren op een spijkerbord, en er dan een nauwkeurige tekening van maken met potlood en liniaal, of een model met behulp van andere materialen, zoals rietjes of pijperagers.

Moedig leerlingen aan te gissen naar wat ze zullen ontdekken en laat hen dan hun veronderstellingen vergelijken met de uitkomsten van hun experimenten. We zouden hen zó moeten sturen dat ze zowel lange als smalle rechthoeken als ook niet-gelijkbenige trapezia gaan bestuderen. Tenslotte kunnen we hen, als we dat willen willen, uitdagen met valse hypothesen:

> als de diagonalen loodrecht op elkaar staan en elkaar middendoor delen, dan kan de figuur alleen maar een vierkant zijn (merk op dat de diagonalen niet even lang behoeven te zijn, vandaar dat de ruit aan de voorwaarden voldoet).

Verscheidene jaren geleden stelde Jesse Rudnick in een lezing voor om geperforeerde kartonstroken te gebruiken, waarvan aan de uiteinden een V-vormig stuk is weggeknipt, zoals te zien in figuur 7.

> Gebruik twee stroken van gelijke lengte, die in het midden aan elkaar bevestigd zijn. Zet een punt bij elk van de vier uiteinden en verbind deze punten met elkaar. Wat voor figuur krijg je? (zie figuur 8)
> Wat gebeurt er als je de hoek tussen de twee stroken verandert?
> Wat krijg je als de twee stroken loodrecht op elkaar staan?



Figuur 7. Geperforeerde kartonstroken waarvan aan de uiteinden een V is weggeknipt. Center = midden.

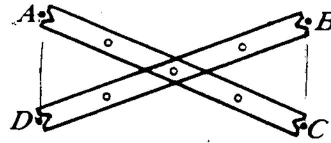


Fig. 8

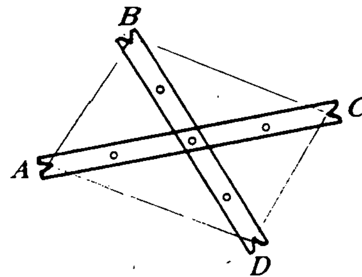


Fig. 9

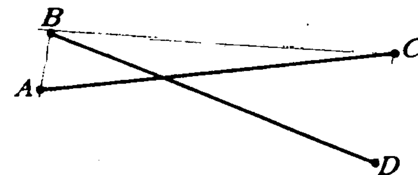


Fig. 10

Gebruik vervolgens twee stroken van verschillende lengte, die weer in het midden aan elkaar bevestigd zijn (zie figuur 9). Voer weer dezelfde opdrachten uit en schrijf op wat je vindt.

Dan wordt het tijd om de leerlingen naar verschillende varianten te laten kijken. We kunnen de leerlingen dat als volgt laten doen: ze raden (zo goed mogelijk) naar de uitkomst, en ze controleren hun veronderstellingen door het zelf te onderzoeken:
twee stroken van verschillende lengte die elkaar middendoor delen;
twee stroken van gelijke lengte die elkaar niet middendoor delen (zie figuur 10).

Vindt u ook dat de uitkomsten niet onmiddellijk voor de hand liggen? Had u zelf een schets gemaakt? Zouden leerlingen niet meer hebben aan het maken van oefeningen in plaats van over de uitkomsten na te denken? Zouden we ook zelf niet beter af zijn met het uitvoeren van zulke opdrachten in plaats van ons voor te stellen wat de uitkomsten zouden kunnen zijn?

Het vouwen van papier vereist weinig voorbereiding en kan leerlingen de gelegenheid bieden meetkundige eigenschappen te onderzoeken.

Vouw een vel papier door midden, zoals te zien in figuur 11. Knip de hoek er af. Wat voor figuur is weggeknipt?
Wat voor soort driehoek heb je nu?
Zullen alle weggeknipte stukjes gelijkbenige driehoeken zijn?

Vouw dan een ander vel papier dubbel en doe alles daarmee nog eens (figuur 12).
Knip het hoekje er af. Wat voor figuur is uit het oorspronkelijke vel weggeknipt? (hoogstwaarschijnlijk een ruit)
Hoe kun je een vierkant krijgen? (door onder een hoek van 45° te knippen)
De vouwlijnen zijn diagonalen; wat merk je daarover op? (ze staan loodrecht op elkaar)

Tenslotte kan de som van de hoeken van een driehoek worden bekeken aan de hand van het welbekende vouwmodel van figuur 13. We onderzoeken dan met de leerlingen het verband tussen lijnstuk

Figuur 11, 12, 13. fold(s) = vouwlijn(en), cut(s) = kniplijn(en).

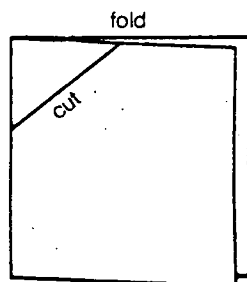


Fig. 11

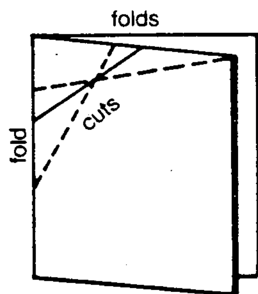
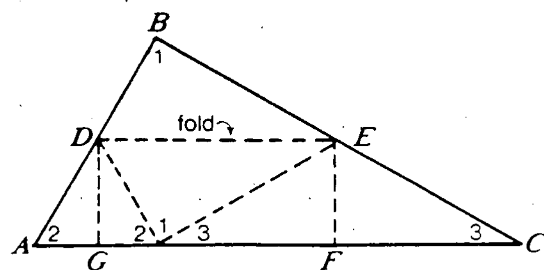


Fig. 12



Figuur 13. Gegeven is driehoek ABC. Vouw A naar B om het midden van AB te bepalen. Net zo voor het midden E van BC. Trek DE en vouw de top van de driehoek naar beneden, vouw langs DE. Ter controle: B moet precies de basis AC raken. Vouw de loodlijn op AC door D, en vervolgens de loodlijn op AC door E. De hoeken 1, 2 en 3 liggen nu langs een rechte lijn; dus: de som van de drie hoeken is 180° (zie Olson (1975)).

DE en de basis; de leerlingen kunnen opmerken dat DG de helft is van de hoogte van de driehoek en dat FG de helft is van de basis. Er zijn veel meer verbanden; welke kunnen de leerlingen vinden?

Ordening

Als de leerlingen de eigenschappen van de figuren op de hiervoor beschreven concrete wijze hebben onderzocht zijn ze in staat een aantal conclusies te trekken over relaties tussen de diverse vierhoeken. Het feit dat een figuur vier zijden heeft, wil niet zeggen dat die figuur een vierkant is.
De leerlingen kunnen de volgende activiteiten ondernemen.

Hier is een lijst van de vierhoeken die je hebt onderzocht:

vierkant rechthoek paralellogram

ruit trapezium

Welke van deze figuren hebben rechte hoeken?
Welke figuren hebben overstaande zijden die evenwijdig zijn?
Welke figuren hebben congruente overstaande zijden?
Het trapezium heeft één paar evenwijdige overstaande zijden; moet het andere paar zijden dan per se congruent zijn?
Welke figuren hebben congruente diagonalen?
Welke figuren hebben diagonalen die loodrecht op elkaar staan?
Construeer op een spijkerbord een vierhoek waarvan geen twee zijden congruent zijn; heeft die vierhoek dan evenwijdige zijden?
Kun je een vierhoek construeren zonder dat er congruente zijden zijn, terwijl op zijn minst één paar zijden evenwijdig is? (Zo'n figuur is een trapezium, dat waarschijnlijk niet gevonden zou zijn als de leerlingen alleen maar de eerste aanwijzing hadden gekregen.)
Construeer weer een vierhoek zonder evenwijdige of congruente zijden. Wat moet je nu doen om een trapezium te krijgen? Doe dat!
Verander nu het trapezium in een parallellogram. Wat deed je?
Verander het parallellogram in een ruit. Hoe deed je dat?
Verander de ruit in een vierkant, het vierkant in een rechthoek die geen vierkant is.
Begin ook met een parallellogram en construeer dan een rechthoek, vervolgens een vierkant, en tenslotte een ruit die geen vierkant is. Noteer bij elke stap wàt je deed.

De namen van elk van de vierhoeken vormen een verzameling labels. Er is bovendien een label dat de hele verzameling kenmerkt: vierhoek.

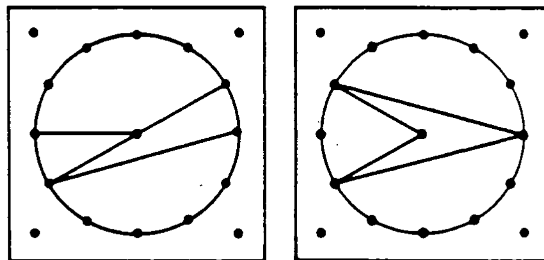
Hoe kun je deze labels in een logische volgorde rangschikken? (als de leerlingen stroomschema's hebben gehad, is de terminologie dáárvan te gebruiken; in ieder geval zal de discussie die volgt als de leerlingen proberen een volgorde te bepalen uiterst interessant kunnen zijn).

We kunnen hetzelfde doen met een Venn-diagram. Een grote cirkel stelt de verzameling van alle vierhoeken voor. Wat moet hieraan nu toegevoegd worden? (Opnieuw zal de discussie interessant en leerzaam zijn!)
Nu kunnen we definities introduceren als de kleinst mogelijke verzameling voorwaarden: dat een vierkant 'een rechthoek is waarvan alle zijden even lang zijn' of 'een ruit met een rechte hoek'. Deze mogelijke definities zouden nu door de leerlingen als zodanig herkend moeten worden.
Een andere manier om verder te gaan is: leerlingen zelf definities laten opschrijven.

Samenvatting

Laten we het leerplan eens bekijken – ofwel het voorgeschreven leerplan, ofwel de inhoudsopgave van het leerboek – en dan speciaal de gedeelten die de meetkunde betreffen. Opgemerkt zij dat in dit artikel het merendeel van de onderwerpen wordt aangestipt. Onderwerpen die vervolgens overblijven, zoals evenwijdige en snijdende lijnen, cirkels en constructies en dergelijke, kunnen gemakkelijk worden geïntegreerd in het model van Van Hiele, waarschijnlijk bij het tweede niveau, dat van de *analyse*.
Bijvoorbeeld, het opmerken van de eigenschap dat 'als twee evenwijdige lijnen gesneden worden door een derde lijn, dat dan alle hoeken die gelijk lijken inderdaad gelijk zijn' kan gemakkelijk gebeuren op

het spijkerbord of op een stuk roosterpapier, of door het overtrekken van het origineel en het vervolgens langs de dwarslijn verschuiven van de overgetrokken tekening.
Ook cirkels kunnen worden onderzocht, veel uitgebreider dan gewoonlijk op dit niveau gebeurt, door gebruik te maken van een geocirkel (wat een geocirkel is, blijkt uit figuur 14, redactie). De stellingen die gewoonlijk zijn opgenomen in de middelbareschoolboeken kunnen op informele wijze worden ontdekt met een geocirkel.



Figuur 14. (a) *(b)*

Bijvoorbeeld, de situatie van figuur 14*a* kan worden gebruikt om de termen straal, diameter (of: middellijn) en koorde te bespreken, terwijl figuur 14*b* kan worden gebruikt om de groottes van middelpuntshoeken en omtrekshoeken met elkaar te vergelijken.

Beginnen met een les over punten, lijnen, stralen, lijnstukken enzovoorts is zeker niet de enige juiste aanpak. Het gaat er om dat de leerlingen een gezonde kijk op deze begrippen krijgen, als een soort verdieping van de ervaringen met eenvoudige figuren.
Ook is het niet zo dat we pas iets aan meetkunde mogen doen als we bij het desbetreffende hoofdstuk zijn gearriveerd. We kunnen bij wijze van spreken elke dag met meetkunde beginnen en er wekelijks aan blijven doen. Het model van Van Hiele pleit voor het ontwikkelen van meetkundige begrippen verspreid over een langere periode, in plaats van geconcentreerd in, pakweg, drie weken die gepland zijn voor een meetkunde-hoofdstuk.
We kunnen er met onze leerlingen plezier in hebben zo nu en dan onderzoek in meetkundige zaken te plegen, als welkome onderbreking van het rekenwerk dat meestal de eerste hoofdstukken in beslag neemt.

Tenslotte zouden we de genoemde hulpmiddelen en de handelende aanpak ook kunnen gebruiken bij de behandeling van de begrippen oppervlakte en inhoud. Zodra het begrip inhoud is geïntroduceerd kunnen de meer gevorderde leerlingen worden uitgedaagd de eigenschappen van kubussen, prisma's en piramides te onderzoeken.
Welke eigenschappen van het vierkant gelden ook voor kubussen?

Met tweede-klassers is een uitbreiding van de afstandsformule van het platte vlak naar de ruimte nu heel goed mogelijk.

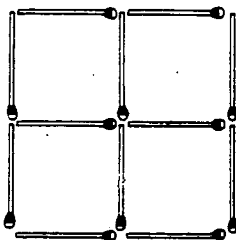
Wáár u ook mee bezig bent, laat de leerlingen niet alleen maar over meetkunde 'lezen' of louter naar meetkunde 'kijken'. Zelfs bij gebrek aan hulpmiddelen kunnen ze aangezet worden tot het controleren van hun veronderstellingen. Terwijl ze met deze activiteiten bezig zijn wordt al snel duidelijk dat het nodig is nauwkeurige tekeningen te maken, dat er gradenbogen, linialen en passers nodig zijn, en dat het 'opmeten' zo zijn beperkingen heeft.
Als meetkunde wordt geïntegreerd in het jaarprogramma kan het gebruik van rechthoekige stroken bij het rekenen met breuken meer betekenis krijgen, kunnen cirkeldiagrammen gemakkelijker worden geconstrueerd (probeer ze op een geocirkel te construeren) en kan meetkunde worden tot een volwassen onderdeel van de wiskunde, in plaats van een los hoofdstuk in de jaarlijkse leerstof.
Misschien is dit laatste punt zelfs waardevoller dan de mogelijkheid dat we leerlingen naar een niveau hebben geleid van waaruit ze formele meetkunde kunnen volgen.

Uit: The Mathematics Teacher, september 1985.
Oorspronkelijke titel: Geometry in the Junior High School.
Vertaling: Juanita Benschop en Marion Seijsener, Amsterdam.

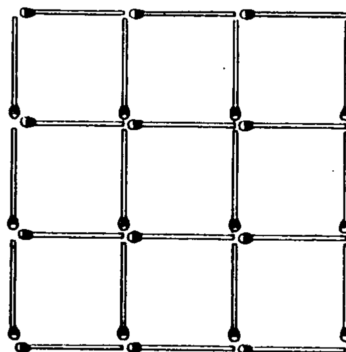
WERKBLAD

Enkele opgaven over vierkanten

1. Begin met twaalf lucifers, neergelegd zoals in het plaatje te zien is. Haal twee lucifers weg, zó dat je twee vierkanten over houdt. (Kunnen deze twee vierkanten even groot zijn?)



2. Begin met 24 lucifers, neergelegd zoals in het plaatje te zien is. Zij vormen zo 9 kleine vierkanten.
a. Neem 8 lucifers weg zó dat er twee vierkanten over blijven, die verschillend in grootte zijn.
b. Neem 4 lucifers weg zó dat dat er 5 even grote vierkanten over blijven.



3. Voor opgave 2a bestaan er tenminste twee oplossingen:
1e. Je kunt 8 lucifers weg halen om zo een vierkant van 1 bij 1 en het grote vierkant over te houden, en
2e. Je kunt 8 lucifers weg halen (niet dezelfde 8 natuurlijk) om zo een vierkant van 2 bij 2 en het grote vierkant over te houden.
Laat deze twee oplossingen zien. Laat bij 2e zien dat er in dat geval vier manieren zijn om de oplossing te krijgen.

Literatuur

Burger, William. *Thought Levels in Geometry*. Interim report of the Assessing Children's Development in Geometry study. Corvallis, Oregon: Oregon State University, 1981.
Driscoll, Mark. *Research within Reach: Secondary School Mathematics, a Research-guided Response to the Concerns of Educators*. St. Louis, Mo.: CEMREL, 1982.
Hoffer, Alan. 'Geometry Is More Than Proof'. *Mathematics Teacher 74* (January 1981): 11-18.
Olson, Alan T. *Mathematics through Paper Folding*. Reston, Va.: National Council of Teachers of Mathematics, 1975.
Usiskin, Zalman. *Van Hiele Levels and Achievement in Secondary School Geometry*. Final Report of the CDASSG Project. Chicago: University of Chicago, 1982.

Over de auteur:

Fernand J. Prevost is verbonden aan het State Department of Education, New Hampshire, Verenigde Staten.

Het laatste nieuws

J. ter Pelle

Een van de taken van de Commissie Ontwikkeling Wiskundeonderwijs is de Staatssecretaris te adviseren inzake de eindtermenontwikkeling voor wiskunde in het voortgezet onderwijs. Een eerste eindtermenadvies zal in juni 1988 worden uitgebracht. In de volgende beschouwing schetst de COW haar inhoudelijke standpunt t.a.v. eindtermen.

1 Eindtermen en ontwikkelwerk

De veranderingen en vernieuwingen die door COW en het ontwikkelteam W12-16 bewerkstelligd zullen moeten worden zijn fundamenteel. Daardoor kan nog niet concreet voorspeld worden hoe leerlingen en leraren op het beoogde nieuwe wiskundeonderwijs zullen reageren.
De COW acht het dan ook prematuur om eindtermen voor wiskunde op te stellen voordat het team W12-16 enige tijd aan het werk is geweest en materiaal heeft kunnen toetsen aan de praktijk van het onderwijs. Daarom zal voorlopig volstaan worden met het formuleren van globale eindtermen. Eén en ander kan worden toegelicht met een paar voorbeelden.
Men kan zich voorstellen, dat op zeker moment leerlingen het onderstaande probleem wordt voorgelegd.

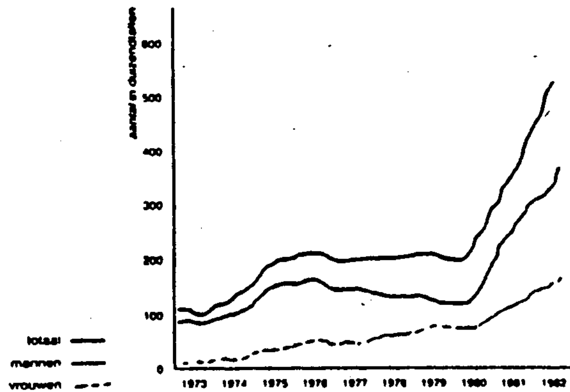
Achter dit probleem zitten verschillende uitgangspunten. Een ervan is dat de makers ervan leerlingen willen laten ervaren, dat wiskunde (in dit geval het interpreteren van grafieken) een nuttig hulpmiddel is bij het onderzoeken van niet-wiskundige situaties. Dit is een uitgangspunt van *ideële* aard.

Daarbij worden verschillende wiskundige vaardigheden toegepast en ingeoefend, zoals het lezen van grafieken. Ook kan met een probleem als dit, gesproken worden over de (on)nauwkeurigheid van

Aandeel meisjes in jeugdcriminaliteit neemt met 30 procent toe

Van onze verslaggever
DEN HAAG- Meisjes tussen twaalf en achttien jaar hebben de criminaliteitscurve de laatste jaren doen stijgen. Het aantal jongens van die leeftijd dat zich schuldig maakte aan strafbaar gedrag is tussen 1980 en 1985 nauwelijks gestegen. Voor meisjes werd een toename van 30 procent geconstateerd.
Bij crimineel gedrag dat bij de politie bekend werd stond in 1980 één meisje tegenover negen jongens. Vijf jaar later bleek dat één op zeven te zijn. Staatssecretaris Korte -van Hemel van Justitie noemde deze cijfers donderdag tijdens een studiedag over bestuurlijke preventie van criminaliteit.
Ook de resultaten van recent onderzoek van het WODC het onderzoeksinstituut van het ministerie van Justitie wijzen op toenemend strafbaar gedrag van meisjes.
Aan jongeren werd een lijst voorgelegd van tien delicten met de vraag of zij zich daaraan het afgelopen jaar hadden schuldig gemaakt. Zwart rijden in tram en bus scoorde het hoogst. Op de vraag naar het plegen van winkeldiefstal werd door 17 procent van de jongeren uit de grote steden bevestigend geantwoord. In kleine plaatsen lag dit percentage de helft lager. Meisjes maakten zich even vaak als jongens aan winkeldiefstal schuldig.
Preventie van criminaliteit betekent volgens de staatssecretaris vooral het tegengaan van jeugdcriminaliteit.
"Voorkomen moet worden dat de jongere afglijdt naar vormen van wangedrag die voor onze samenleving onaanvaardbaar zijn", aldus Korte -van Hemel.

Deze grafieken laten de ontwikkeling zien van de werkloosheid in Nederland in de periode van 1973 tot 1982.
▶ Neem de tabel hieronder over en haal uit de grafiek de gegevens die je moet invullen.
▶ Als de grafiek van het totale aantal werklozen niet getekend was, hoe zou je die dan met behulp van de andere grafieken kunnen tekenen?



Uit de grafieken kun je een aantal feiten aflezen.
▶ Vanaf welk jaar is de totale werkloosheid sterk toegenomen?
▶ In welke periode bleef de totale werkloosheid vrijwel gelijk?
▶ Geldt dat in die periode ook voor de werkloosheid onder mannen? En voor de werkloosheid onder vrouwen?

1 januari van het jaar	'73	'74	'75	'76	'77	'78	'79	'80	'81
totaal *aantal* werklozen	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....

de getallen die uit de grafieken kunnen worden afgelezen. Dit is een uitgangspunt van *formele* aard.
Ook willen de makers met dit probleem leerlingen voorbereiden op wat later expliciet het optellen en aftrekken van functies zal worden genoemd. Zij menen dat deze impliciete voorbereiding vooraf moet gaan aan een expliciete en dus abstracte generalisering. Dit is een uitgangspunt van *pedagogisch-didactische* aard.

Het tweede voorbeeld heeft betrekking op voortgezet rekenen in de basisvorming van het vo.
Onlangs stond het bovenstaande bericht in de krant.
Dit bericht kan aanleiding zijn tot het stellen van vragen als:
- Wat zou er bedoeld zijn met 'de criminaliteitscurve'?. 'Waar slaat die 30 procent op?
- Is het 30 procent van het aantal criminele meisjes?
- Is het 30 procent van het totaal aantal meisjes?
- Is het 30 procent van het totaal aantal criminele kinderen?
- Is het totaal aantal meisjes en jongens tussen 1980 en 1981 veranderd?
- Aangenomen dat bedoeld is 30 procent van het aantal criminele meisjes in 1980, is dat getal 30 dan wel goed?
- Enz, enz, enz.

Ook hier hebben de opstellers van het probleem het gebruik van wiskunde als relevant hulpmiddel bij niet-wiskundige problemen voor ogen.
Daarnaast is er weer een impliciet doel, namelijk de leerlingen te oefenen in het begripsmatig rekenen met procenten, c.q. hun vaardigheid daarin te onderhouden. Een verpakking als in dit voorbeeld van de gevreesde procentsommen is vooral van belang voor leerlingen die geleerd hebben rekenen op te vatten als een vak waar ze bang voor moeten zijn, omdat ze het toch nooit zullen leren.
In beide voorbeelden komt ook het aspect redeneren naar voren.
Een aanpak als in beide voorbeelden ziet er aantrekkelijk uit. Er is bij de SLO, bij het voormalige IOWO en in verschillende andere projecten al het een en ander aan gedaan. Resultaten daarvan zijn enerzijds bemoedigend, maar manen ook tot voorzichtigheid en wel om de volgende redenen:
- Ontwikkelaars ervaren telkens, dat de mate waarin leerlingen door niet-wiskundige contexten worden gemotiveerd nog uiterst moeilijk te voorspellen is. Bruikbare criteria voor het voorspellen van intrinsieke motivatie ontbreken nog. Er zijn al wel wat aanwijzingen gevonden, maar over het algemeen moeten auteurs nog op hun ervaring en intuïtie afgaan. Dit is op zichzelf niet bezwaarlijk, maar het toont wel aan dat het doen van voorspellingen over onderwijsresultaten in de vorm van het vroegtijdig

vastleggen van gedetailleerde eindtermen onverantwoord is.

- Ontwikkelaars ervaren dat leraren die met grote enthousiasme wiskunde in deze vorm willen onderwijzen, grote moeite hebben om in opgaven als bovenstaande de wiskundige ondergrond te herkennen. En als ze dat doen, dan kost het grote moeite het pedagogisch-didactisch belang te onderkennen het bedoelde begrip niet direcct aan hun leerlingen uit te leggen. Blijkbaar is het onderkennen en gebruiken van zulke impliciete doelen ook een vaardigheid die geleerd moet worden. Dit betekent, dat er naast het ontwikkelwerk veel voorlichtings-, c.q. nascholingswerk verricht moet worden. Er is nog geen volledige duidelijkheid voor de mogelijkheden daartoe. Met betrekking tot het formuleren van eindtermen houdt dit in, dat men leraren niet kan belasten met het nastreven van eindtermen waarvan het nog onzeker is of zij die volledig zullen kunnen realiseren.

Men kan zich dan afvragen of het ontwikkelteam geheel de vrije hand gegeven moet worden. Zijn er dan geen richtlijnen waar het team zich aan zal moeten houden?
Vanzelfsprekend zullen die er wel moeten zijn. Er is onder meer de praktische eis, dat de basisvorming zal moeten aansluiten op het vervolgonderwijs. Daarnaast zullen er uitgangspunten moeten zijn, die berusten op een visie op wiskunde-onderwijs. In dit artikel zullen zulke zaken worden samengevat met het woord bakens.

2 Bakens of eindtermen?

Het woord 'baken' wordt door de COW gehanteerd omdat het enerzijds niet belast is met allerlei verschillende betekenissen uit onderwijskundige verhandelingen en anderzijds omdat het als metafoor duidt op de richting waarin ontwikkelaars zullen moeten gaan werken. Het sluit in, dat het onderwijsproces wel globaal wordt bepaald, maar niet in details, zoals dat bij het formuleren van eindtermen het geval zou zijn.
Het sluit tevens een flexibiliteit in: men kan 'de bakens verzetten' als in de loop van het ontwikkelwerk blijkt, dat ze bij nader inzien niet precies aangeven wat er wordt bedoeld. Bij geformuleerde en dus geformaliseerde eindtermen is het wijzigen daarvan veel moeilijker.
Het sluit verder in dat voor de beoordeling van het onderwijs niet het naakte eindresultaat met inachtneming van de bakens is bereikt. Eindtoetsen zouden dusdanig moeten worden ingericht, dat zulks er mede uit kan blijken.

Het zal nauwelijks nodig zijn dit systeem van bakens ter bepaling van het wiskunde-onderwijs te rechtvaardigen. Wiskunde-onderwijs waarbij alleen naar de naakte eindresultaten gekeken wordt, negeert de flexibiliteit die vereist is, wil een leerling het geleerde in nieuwe situaties met succes kunnen toepassen.
Ontwikkelingswerk waarbij alleen naar eindtermen gekeken wordt, negeert de flexibiliteit die vereist wordt wil een ontwikkelteam met succes een onderwijsleerprogramma ontwerpen dat voldoet aan een visie op wiskundeonderwijs, dat hierna - in de vorm van globale bakens - geschetst zal worden.

Het opstellen van eindtermen voor wiskunde is (mede) opgedragen aan de COW. Deze beveelt aan eindtermen voorlopig te interpreteren zoals geschetst voor de bakens. In deze zin zal het mogelijk zijn al in juni 1988 een globale inhoud te geven van het beoogde onderwijs.
Een jaar later, nadat het ontwikkelteam zich terdege georiënteerd heeft, kan een en ander aangescherpt worden in een rapport waarin het beoogde onderwijs nader wordt omschreven met meer details en voorbeelden.
Pas in het in '92 op te leveren eindrapport zal het stelsel van bakens, dat dan op basis van ontwikkelwerk kan worden opgesteld, voldoende leidraad kunnen geven voor het opstellen van eindtoetsen.

3 Nadere aanduiding van de betekenis van bebakening

De bebakening is bedoeld om het hele ter discussie staande wiskunde-onderwijs te overtrekken, dus los van een categoriale indeling. Hierbij dient onderscheid gemaakt te worden tussen globale bebakening en lokale bebakening.

Bij de globale bebakening moet gedacht worden aan omschrijvingen, die een visie op wiskunde-onderwijs inhouden en neergelegd worden in de vorm van uitgangspunten. De geestdrift waarmee het team te werk gaat zal vooral voortkomen uit deze visie. Hieronder zullen een aantal uitgangspunten worden geformuleerd. Ter toelichting van de betekenis van wat met globale bebakening wordt bedoeld is hier alvast een voorbeeld:

- Wiskunde is nuttig.

Daarnaast hoort bij de globale bebakening een lijstje van leerstofgebieden, waarin bijvoorbeeld voorkomt:

- Voortgezet rekenen.

Dit is wel uiterst globaal. Iets meer detaillering, ook voor globale bakens is dit nodig.
De globale bakens bieden echter te weinig houvast om tot concreet didactisch materiaal met de daarbij mogelijke werkwijzen te komen.
Daarvoor is een meer lokale bebakening nodig in de vorm van een nadere uitsplitsing van leergebieden en een beschrijving van pedagogisch-didactische hulpmiddelen. Deze bebakening mag aan de ene kant niet zo nauw zijn, dat het onderwijs er strak door wordt vastgelegd, anderzijds niet zo wijdmazig, dat onvoldoende zekerheid ten aanzien van het onderwijs wordt geschapen.
De hierboven gegeven voorbeelden zijn concrete uitwerkingen van (onder andere) het uitgangspunt van de nuttigheid van wiskunde.

Het eerste voorbeeld rond werkloosheid zou in een lokale bebakening passen in de vorm van omschrijvingen als:

- Conclusies trekken uit grafieken.
- Bij twee gegeven grafieken beschrijven hoe de som- en de verschilgrafiek getekend moet worden, dat ook doen en de zinvolheid en betekenis ervan beschrijven in de onderhavige context.
- Het optellen en aftrekken van grafieken in verband brengen met de som en het verschil van functies.
- Bereid zijn om in andere contexten te zoeken naar situaties, waarbij het tekenen van grafieken en hun som of verschil op een zinvolle manier kan bijdragen aan de oplossing van een probleemsituatie.

Het tweede voorbeeld rond criminaliteit past in bijvoorbeeld:

- Procenten omrekenen in decimale getallen en vice versa.
- Procenten vermenigvuldigen en optellen.
- Begrijpen, dat bij 'zoveel procent' steeds bedoeld wordt 'zoveel procent van iets' en in de probleemsituatie, waarin getallen een rol spelen, omwerken in een wiskundige probleemsituatie en, na oplossing daarvan, het resultaat in de oorspronkelijke situatie interpreteren.

Beide voorbeelden passen weer in een wat ruimer baken, zoals:

- Teksten met numerieke gegevens kritisch beoordelen.

Concreet materiaal en beschrijving van de mogelijke werkwijze bij het verwerken daarvan dient door de ontwikkelaars voortdurend getoetst te worden aan de lokale en de globale bakens.
We geven nu een eerste opzet van globale bakens:

4 Globale bakens als toetscriteria van ontwikkelwerk

Vijf ideële uitgangspunten voor het wiskunde-onderwijs:

1 Wiskunde-onderwijs vindt plaats in voor leerlingen herkenbare situaties

Dit is een andere manier van zeggen voor de eis dat realistisch wiskunde-onderwijs gegeven moet worden, of dat bij het wiskunde-onderwijs uitgegaan moet worden van de leefwereld van de leerling. Het is ook een duidelijker manier van zeggen. Een woord als 'realistisch' kan gemakkelijk verward worden met 'authentiek'. Het verschil zit hierin, dat authenticiteit een objectief gegeven is, realisme daarentegen subjectief van aard is. Niet-authentieke, maar bijvoorbeeld gefantaseerde verhalen kunnen immers zeer herkenbaar, en dus realistisch voor mensen zijn. Soortgelijke opmerkingen kunnen worden gemaakt ten aanzien van 'de leefwereld'. Een sprookjeswereld kan wel degelijk behoren tot iemands leefwereld. Het is daarom ook niet uitgesloten, dat bij wiskunde-onderwijs sprookjesachtige contexten gebruikt kunnen worden. Ook zijn er tal van situaties die niet tot iemands eigen

leefwereld behoren, waar men zich toch heel goed bij kan inleven, dat wil zeggen dat men die tot zijn eigen leefwereld kan maken.
De eis van inleefbaarheid komt voort uit zowel het pedagogische beginsel, dat men mensen geen werk zou moeten laten doen, dat geen betekenis voor hen heeft, als uit de psychologische overweging, dat mensen beter (dat wil zeggen met meer inzicht) leren naarmate de leerstof meer betekenis voor hen heeft.

2 In het onderwijs moet het actief en wiskundig verantwoord bezig zijn aan het oplossen van problemen centraal staan

Ook dit uitgangspunt komt voort uit zowel pedagogische, als psychologische overwegingen van dezelfde soort als hierboven. Daarnaast is er ook de overweging, dat wiskunde niet als discipline gezien moet worden maar als een activiteit, die ontstaat uit een voortdurend zoeken naar relaties tussen probleemsituaties en kernen. Zulke relaties kunnen betrekking hebben op horizontaal mathematiseren en op verticaal mathematiseren. Daarbij moet rekening gehouden worden met het impliciet of expliciet onderscheiden van verschillende aspecten van wiskunde, zoals het theoretische, het algoritmische, het logische, het methodische en het conventionele aspect.

3 Wiskunde is nuttig

Deze nuttigheid komt op verschillende manieren tot uitdrukking:
- in het gebruik van wiskunde bij andere vakken in de school;
- in het gebruik van wiskunde bij niet-wiskundige probleemsituaties buiten de school;
- in het gebruik van wiskunde bij niet-wiskundige probleemsituaties in voortgezette opleidingen en in het latere beroepsleven;
- in het gebruik van wiskunde bij niet-wiskundige probleemsituaties in het maatschappelijk, maar niet beroepsmatig functioneren;
- bij het werken aan wiskundige problemen;
- bij het onderzoeken van de rol van wiskunde als historisch en cultureel verschijnsel in onze samenleving.

Opmerking: Deze uitsplitsing in verschillende gebieden dient niet alleen tot toelichting van wat er met 'nuttig' bedoeld wordt. Het heeft ook te maken met pedagogisch-didactische consequenties bij het ontwikkelen van onderwijs. Ontwikkelaars ervaren dikwijls, dat verlangens uit de verschillende gebieden waar wiskunde nuttig geacht wordt strijdig met elkaar zijn. Met name als het gaat om het onderscheid tussen wiskundige en niet-wiskundige situaties. In eerder genoemde voorbeelden zijn situaties gegeven, waaruit blijkt, dat dat niet altijd het geval behoeft te zijn, mits maar een geschikte manier van onderwijsaanbod gevonden wordt.
Daar waar in het praktische ontwikkelwerk van het team strijdigheid om de een of andere reden niet vermeden kan worden zullen keuzen gemaakt moeten worden. Richtlijnen voor het maken van een keus zijn nauwelijks te geven, of het zou moeten zijn, dat in elk geval aan het eerste uitgangspunt voldaan moet worden.

Opmerking: De omschrijving van de laatste twee gebieden is een generalisatie (en dus een deftige manier van zeggen) van het uitgangspunt dat mensen ook plezier aan wiskunde en het oplossen van wiskundige puzzels kunnen en moeten kunnen beleven. Ook in deze betekenis is wiskunde nuttig.

4 De individuele leerling moet een goed beeld kunnen krijgen van haar/zijn vermogen wiskunde te leren en in de praktijk te brengen, en moet in staat gesteld worden in samenwerking met anderen overeenkomstig die vermogens te werken.

Met 'vermogens' wordt hier niet alleen gedoeld op intellectuele capaciteiten.
Het slaat ook op:
- het vermogen zich in een bepaalde situatie in te kunnen leven,
- het vermogen samen met anderen aan bepaalde problemen te werken,
- het vermogen om in probleemsituaties (de) relevante wiskundige kernen te zien,
- het vermogen om een intuïtief gevonden, of een overdachte oplossing van een probleem in taal en tekst te kunnen uitdrukken,
- ...enz.

Zulke vermogens zijn geen statische gegevenheden. Het gaat er juist om onderwijs te ontwerpen, waarbij deze vermogens worden ontwikkeld. Het tweede deel van dit uitgangspunt houdt in dat de leerling gelegenheid moet krijgen op eigen niveau aan wiskunde te werken in samenwerking met anderen.

5 *Het onderwijs moet aansluiten bij de verschillende vormen van vervolgonderwijs*

Deze eis lijkt nauwelijks toelichting te behoeven. Toch passen een paar kanttekeningen.
Tot het vervolgonderwijs kan (momenteel) gerekend worden de bovenbouw van het havo en van het vwo, het eindexamenjaar van het mavo en het lbo, en vormen van (k)mbo.
Met betrekking tot het vwo kan enerzijds opgemerkt worden, dat de inhoud ervan tot nader order redelijk constant zal zijn. Daardoor zullen de eisen, die dat onderwijs aan de basisvorming stelt ook redelijk te overzien zijn. Anderzijds mag verondersteld worden, dat de ontwikkeling van een nieuw onderwijsprogramma voor de basisvorming ook haar invloed zal doen gelden naar boven.
Een en ander betekent, dat het team regelmatig contact zal houden met verantwoordelijken voor het betrokken onderwijs.

Mutatis mutandis geldt dat ook voor het havo, zij het dat voor de bovenbouw van het havo thans ook een onderwijsprogramma (het zogenaamde Hawex-programma) ontworpen wordt. De activiteiten van de groep, die zich daarmee bezig houdt lopen voor op het werk voor 12 tot 16, maar een intensief overleg waarbij wederzijdse beïnvloeding mogelijk moet zijn, is noodzakelijk.

De ontwikkelaars zullen nieuw wiskunde-onderwijs ontwerpen voor de eerste leerjaren van het voortgezet onderwijs. Het eindexamenprogramma van mavo en lbo zal gewijzigd moeten worden en aangepast aan wat er door Commissie en ontwikkelaars tenslotte voorgesteld zal worden. Onvrede met het onderwijs en het eindexamen in deze schooltypen is immers een van de belangrijkste redenen geweest voor het plan een nieuw programma te ontwerpen.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Jaarvergadering/Studiedag zaterdag 29 oktober 1988

Het programma van de studiedag staat in het teken van vernieuwingen in het wiskundeonderwijs zoals bij Wiskunde 12/16 en HAWEX. Er zijn drie lezingen met tegelijkertijd werkgroepen voor de overige deelnemers.

9.30-10.00 uur	aankomst, koffie, inschrijven op de groepen
10.00-10.30 uur	huishoudelijk gedeelte
10.30-10.45 uur	**INLEIDING OP DE STUDIE-DAG**
10.45-11.00 uur	pauze, koffie inschrijven op de groepen
11.00-12.15 uur	**LEZING** over Wiskunde 12-16 daarnaast acht groepen
12.15-13.30 uur	lunch
13.30-14.45 uur	**LEZING** over **HAWEX** Daarnaast acht groepen
14.45-15.00 uur	pauze, koffie, thee
15.00-16.15 uur	**LEZING** over de computer bij W12/16 en **HAWEX** daarnaast acht groepen
16.30-17.00 uur	huishoudelijk gedeelte rondvraag, sluiting

Het stiefkind informatica

Jacques Haubrich

In april 1968 bracht een vijftal hoogleraren een rapport uit aan de Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde over de wenselijkheid en mogelijkheid van het invoeren van computerwiskunde in het onderwijs voor mavo, havo en vwo.[1] Dat is al weer zo lang geleden dat van dit vijftal thans nog slechts één hoogleraar in functie is. Als voor de hand liggend vervolg op dat rapport werd van 12 tot 14 september 1968 aan de Technische Hogeschool Eindhoven een heroriënteringscursus over computerwiskunde gehouden, speciaal bestemd voor wiskundeleraren. In het februarinummer 1969 van Euclides werd een kort verslag over deze cursus geplaatst, geschreven door G. J. Vannisselroy uit Bloemendaal. Zoals in het verslag vermeld, werd de cursus afgesloten met een plenaire discussie waarin met name vier stellingen werden behandeld. Deze stellingen betroffen:

1 de wenselijkheid om computerwiskunde in het middelbaar onderwijs in te voeren;
2 de inhoud van het vak computerwiskunde in het middelbaar onderwijs;
3 de plaats van computerwiskunde in het middelbaar onderwijs;
4 de geschiktheid van de leraren en van de bestaande lerarenopleiding met betrekking tot de computerwiskunde.

Nu, oktober 1987, bijna 20 jaar later, spreken we niet meer over 'computerwiskunde' maar over 'informatica' en spreken we niet meer over 'middelbaar onderwijs' maar over 'voortgezet onderwijs'. Voor het overige is het interessant, in dat oude nummer van Euclides te lezen tot welke conclusies men in die slotdiscussie kwam.

Dat computerwiskunde moest worden ingevoerd, daarover was men het in 1968 al eens. Dat computerwiskunde het meest aansloot bij het vak wiskunde, werd uiteraard onderkend; vandaar natuurlijk het vanuit hedendaagse optiek nogal rare woord. Dat het vak in de onderbouw een plaatsje moest krijgen, werd als vanzelfsprekend ervaren, al was het geen overduidelijke zaak in welke leerjaren en of zulks als onderdeel van het wiskundeprogramma zou moeten. Dat het vak als een zelfstandig vak in de bovenbouw een plaats zou dienen te krijgen, was communis opinio en over de geschiktheid van de leraren en hun opleidingen deed men wijselijk geen uitspraak.

De stand van dit moment

Als hetzelfde verhaal in het vorige of zelfs in dit nummer van Euclides had gestaan, waar nodig met genoemde aanpassing van terminologie, had waarschijnlijk iedereen bij doorlezing instemmend geknikt. Op zich is het natuurlijk uitermate treurig, dat dergelijke conclusies uit 1968 op dit moment, bijna 20 jaar later, nog steeds van kracht zijn. Het is blijkbaar niet mogelijk gebleken in deze termijn de genoemde conclusies te vertalen in beleid. Erger nog, het onderwerp lijkt langzaamaan uit de belangstelling te raken; de discussie is goeddeels verstomd, over het onderwerp informatica-onderwijs wordt nauwelijks gesproken. Alleen in de VBAO-plannen wordt de computer even genoemd, maar wie zou dat ook durven laten?

Het ministerie van onderwijs heeft kapitalen uitgegeven aan adviescommissies, onderzoeken en proefprojecten, de hele Nederlandse begeleidingswereld heeft zich op de computer gestort en heeft zich uitgebreid met nieuwe, elkaar begeleidende instituten als bijvoorbeeld het C.O.I., het S.C.E.N., complete afdelingen binnen het N.I.A.M. en de pedagogische centra, diverse regionale steunpunten en ga zo maar door. Het bedrijfsleven heeft eerst in het 100-scholen project en daarna in het N.I.V.O.-project de kans gekregen vrijwel verouderde apparatuur voor een mooie prijs in het onderwijs te dumpen, terwijl dat onderwijs daar in heel wat gevallen bepaald niet op zat te wachten. Het ministerie gaf er nog eens aan elke school een

software-cheque van 2 mille bij en wat zijn we ermee opgeschoten? Aan de scholen waar al wat gebeurt, wordt in heel veel gevallen – de goede niet te na gesproken – op computergebied alleen dat gedaan, wat door een docent op grond van zijn persoonlijke, op uitoefening van een hobby gebaseerde inzichten zinvol geacht wordt. Serieuze bijscholing wordt nauwelijks geboden. Argeloze leerlingen denken dat kennis van computers een garantie is voor topfuncties en deze vorm van informatica-onderwijs wordt vaak door de schoolleiding extra gestimuleerd omdat het een wervende kracht zou hebben bij de aanmelding van nieuwe brugklassers. Lang leve de vrijheid van onderwijs, op grond waarvan centrale richtlijnen uit den boze zijn en elke school naar eigen inzicht maar wat raak kan knutselen!

Informatica is op dit moment in het vwo-avo een formeel niet bestaand vak en het komt evenmin voor als onderdeel van enig bestaand vak (wat er binnen wiskunde-A op dit gebied gebeurt, is nauwelijks meer dan 'ruiken aan'). Voor de sukkelaar die desondanks enige lessen informatica geeft, zijn dat onbevoegd gegeven lessen; het vak bestaat immers niet. Leerlingen kunnen er geen examen in afleggen en enige kennis op dit terrein behoort voorlopig niet tot de basisstof die in de onderbouw aan de orde dient te komen.
Informatica is daarentegen op universitair niveau een de wiskunde vrijwel geheel ontgroeide, zelfstandige studie. Dat geldt evenzeer op het niveau van het hoger beroepsonderwijs. In het particuliere onderwijs en in interne bedrijfsopleidingen heeft het informatica-onderwijs een omvang die welhaast groter is dan alle andere onderwerpen van onderwijs te samen, al wil dat op zich nog niets zeggen over de kwaliteit van het gebodene.
Hoe is het mogelijk, dat een dergelijke tegenstelling kan bestaan?! Iedereen mag daar zijn mening over hebben; in het algemeen zal die mening niet erg vleiend zijn voor de politieke beleidsmakers. Eigenlijk is het ook niet zo interessant om te bezien in welke richting een beschuldigend vingertje zou moeten worden uitgestoken, maar veel meer om te bezien hoe men een kennelijk al bijna 20 jaar bestaande impasse zou kunnen doorbreken en eindelijk datgene kan gaan doen waarvan men blijkbaar al 20 jaar lang vindt dat het moet gebeuren.

Hoe zou het dan moeten?

Er zijn maar weinig studierichtingen op universitair- of Hbo-niveau aan te wijzen die niet op een of andere wijze een duidelijk fundament in het vwo-avo hebben. Ik kom nauwelijks verder dan rechten, psychologie en enkele andere logieën. Informatica is ook zo'n studierichting zonder fundament, dit ondanks de overduidelijke behoefte aan op welk niveau dan ook geschoolde informatici. Wat ligt dan meer voor de hand, dan een snelle invoering van allereerst een keuzevak informatica in de hoogste klassen van het vwo-avo? Een keuzevak, naast wiskunde, natuurkunde, geschiedenis, enzovoort; een keuzevak met een inhoud die zonder veel moeite kan worden afgeleid uit de curricula van de eerste studiejaren aan universiteiten en hio's, eventueel in een nadere kruisbestuiving met de wensen vanuit de beroepspraktijk.

Als er een proefproject gestart zou mogen worden, waarbij een of twee universiteiten samen met drie of vier scholen een examenvak van de grond zouden kunnen tillen, dan denk ik dat we binnen anderhalf jaar met enkele voorexamenklassen kunnen starten met onderwijs in een experimenteel programma en dat er drie jaar na deze start een goede basis is gevonden voor algemene invoering van een examenvak informatica. Zou zoiets nu niet eens gewoon geprobeerd kunnen worden? Geen praatcommissies, geen discussiegroepen, geen denominatorische touwtrekkerij, maar gewoon wat gezond verstand bij elkaar trommelen en eindelijk eens echt wat **doen**. Wat kosten betreft zou het wel eens mee kunnen vallen. Zeg dat je er tien mensen geheel of gedeeltelijk voor zou moeten vrijstellen van hun huidige taak, dan kom je een heel eind. Datzelfde team zou in de loop van het project voor enkele stevige bijscholingscursussen kunnen zorgen, zodat drie jaar later aan alle scholen het vak inderdaad kan worden ingevoerd zonder dat men struikelt over onvoldoende of eenzijdige deskundigheid bij de docenten.

In de onderbouw

Is eenmaal duidelijk wat zo'n examenvak informa-

tica, gericht op 15- tot 18-jarigen, aan inhoud moet krijgen, iets wat dus op redelijk korte termijn te bereiken is, dan kan van daaruit worden doorgedacht of en hoe in de direct daaronder liggende leeftijdsgroep een meer algemene basisvorming kan worden bereikt. Hoewel ik in dit opzicht als oud-lid van die commissie niet geheel onbevooroordeeld ben, komt het mij voor dat het reeds in 1984 door de 'Adviescommissie voor Onderwijs en Informatietechnologie' aan de minister van onderwijs uitgebrachte advies een heel geschikt uitgangspunt biedt.[2]

Tot besluit

In het voorgaande heb ik met geen woord gerept over het lager en middelbaar beroepsonderwijs. Dat betekent allerminst een depreciatie van deze soorten onderwijs. De enige reden daarvoor is, dat ik inzake deze schooltypen onvoldoende op de hoogte ben met de huidige stand van zaken op informaticagebied. Deze onderwijsvormen hebben natuurlijk in een ontwikkelingsstrategie even veel recht op aandacht als het vwo-avo. Bij de ontwikkeling van een examenvak zoals in het voorgaande geschetst zal waarschijnlijk veel kunnen worden ontleend aan wat al in het mbo wordt gedaan en zal er voor het vwo-avo het nodige worden ontwikkeld dat eenvoudig in het mbo kan worden gebruikt. Bij de daarop volgende ontwikkeling van een onderbouw-curriculum zal naar analogie het lbo evenzeer in de beschouwingen betrokken moeten worden als de onderbouw van het avo. Ik hoop alleen, dat er eindelijk eens iets gaat gebeuren, dat de minister en zijn staatssecretaris eens wat knopen doorhakken en de benodigde voorwaarden scheppen waarin een zinvolle en doelgerichte ontwikkeling kan plaatsvinden. Het zal wel eens tijd worden.

Noten

1 Rapport over de wenselijkheid en mogelijkheid van het invoeren van computerwiskunde in het onderwijs voor MAVO, HAVO, en VWO, uitgebracht aan de Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde door een commissie bestaande uit de hoogleraren Dr. N. G. de Bruijn, Dr. M. Euwe, Dr. J. J. Seidel, Dr. A. van der Sluis en Dr. E. van Spiegel. April 1968.

2 Informatieleer en Computerkunde: over de inhoud van en apparatuur voor 'Burgerinformatica'. Rapport van de Adviescommissie voor Onderwijs en Informatietechnologie. ISBN 90 12 04606 8. Uitgegeven door de Staatsdrukkerij te 's-Gravenhage.

Over de auteur:

Jacques Haubrich is sinds 1967 leraar wiskunde aan een scholengemeenschap voor vwo, havo en mavo te Eindhoven.

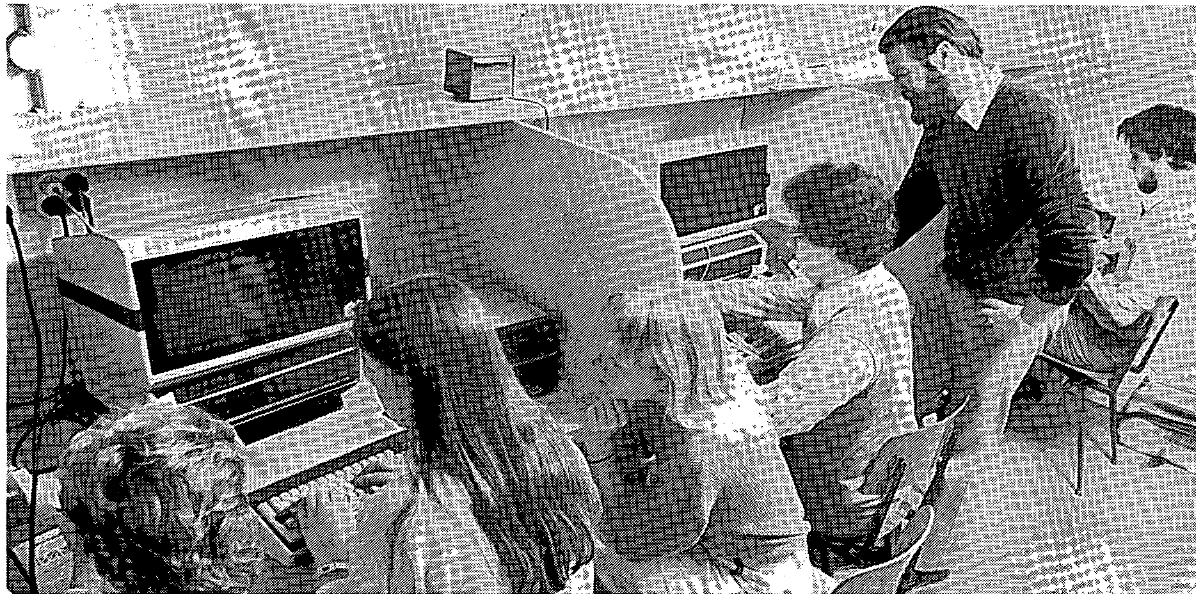


Foto: John Stoel

Welgeteld

M. C. van Hoorn

Welgeteld 5 reacties mocht de redactie ontvangen op het artikel van W. Kleijne & H.N. Schuring: Soms is tellen zo eenvoudig niet, verschenen in Euclides 63, nr. 2, blz. 56-60.
Deze reacties waren afkomstig van R. Bosch (Prinsenbeek), E. J. van Kervel (Utrecht), Th. J. Korthagen (Warnsveld), P. W. H. Lemmens (Utrecht) en K. A. Post (Eindhoven).
P. W. H. Lemmens was de eerste die zijn reactie inzond. Zijn bijdrage plaatsen wij hierna. Eerst geven wij een samenvatting van de reacties (met o.a. een fraaie toepassing van K. A. Post). En tenslotte plaatsen wij een korte dankzegging van de auteurs van het oorspronkelijke artikel.

Inclusie en exclusie

De inzenders nemen twee zaken nader onder de loep. Het meest genoemd is het *principe van inclusie en exclusie*.
Dit principe behelst het tellen van het aantal elementen van de vereniging van een stel verzamelingen; de betreffende verzamelingen bevatten elk eindig veel elementen en ze zijn niet noodzakelijkerwijs disjunct.
Als we beginnen met twee verzamelingen, V_1 en V_2, dan mogen we niet zomaar de aantallen elementen van V_1 en V_2 optellen (*inclusie*); we zouden dan immers de gemeenschappelijke elementen dubbel tellen. Het aantal gemeenschappelijke elementen moeten we dus aftrekken (*exclusie*):
$|V_1 \cup V_2| = |V_1| + |V_2| - |V_1 \cap V_2|$
Hierin is $|V|$ het aantal elementen van de verzameling V. P. W. H. Lemmens geeft een generalisatie van het voorgaande in termen van eigenschappen, Th. J. Korthagen en K. A. Post bewijzen formule (2) van W. Kleijne & H. N. Schuring verzamelingstheoretisch.

Een recurrente betrekking

Voor het overige gaan de reacties hoofdzakelijk over de recurrente betrekking

$$C_k^n = k \cdot \left(C_{k-1}^{n-1} + C_k^{n-1}\right)$$

In de notatie van P. W. H. Lemmens luidt deze betrekking

$$A_{n,k} = k\,(A_{n-1,k-1} + A_{n-1,k})$$

Verondersteld is dat $n > k$.
E. J. van Kervel en P. W. H. Lemmens bewijzen deze betrekking door C_k^n (respectievelijk $A_{n,k}$) te beschouwen als het aantal surjecties van de verzameling $\{1, \ldots\ldots\ldots, n\}$ op de verzameling $\{1, \ldots\ldots\ldots, k\}$.
K. A. Post beredeneert de betrekking door C_k^n te beschouwen als het aantal manieren waarop n paaltjes (die niet verwisseld mogen worden) kunnen worden geschilderd in k verschillende kleuren, zó dat elke kleur gebruikt wordt. Met volledige inductie blijkt dan dat $C_k^n = \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n$
R. Bosch volgt een soortgelijke weg.
K. A. Post bewijst bovendien rechtstreeks dat de laatstgenoemde uitdrukking gelijk is aan $k!$ als $k = n$, en gelijk is aan 0 als $k > n$.

De Sinterklaasloterij

K. A. Post geeft nog een fraaie toepassing van het principe van inclusie en exclusie:
De Sinterklaasloterij: Een gezelschap van n personen trekt briefjes om surprises voor elkaar te maken. Het is de bedoeling dat niemand een briefje met zijn eigen naam trekt. Op hoeveel manieren kan dat? Probeer het eens met $n = 4$. We vinden 9 als antwoord. Bij $n = 5$ vinden we 44. Algemene

formule? Het getal $n!$ dat alle permutaties van briefjes telt, is beslist te groot. Het juiste antwoord wordt gevonden met inclusie-exclusie als volgt: V_i is de verzameling trekkingen waarbij persoon i zijn eigen naam trekt. $\left|\bigcup_{i=1}^{n} V_i\right|$ telt dus alle trekkingen waarbij minstens één deelnemer zichzelf trekt, en $d_n := n! - \left|\bigcup_{i=1}^{n} V_n\right|$ is het gevraagde aantal.

Met inclusie-exclusie vinden we

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} V_i\right| = \begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix}(n-1)! - \begin{bmatrix} n \\ 2 \end{bmatrix}(n-2)! + \\ + \begin{bmatrix} n \\ 3 \end{bmatrix}(n-3)! - \ldots + (-1)^{n-1}\begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix}\cdot 0! = \\ = n!\left[1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \ldots + (-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{n!}\right],$$

waardoor we zien dat

$$d_n = n!\left[1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \ldots + (-1)^n\cdot\frac{1}{n!}\right].$$

Een antwoord dat lijkt op $\frac{n!}{e}$; d_n is evenwel geheel en $\frac{n!}{e}$ niet. We maken een schatting van $\left|d_n - \frac{n!}{e}\right|$ als volgt:

$$\left|d_n - \frac{n!}{e}\right| = \\ = n!\left[\frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+3)!} - \ldots\right],$$

een alternerende reeks met monotoon afnemende absolute waarden der termen.
Dus

$$\left|d_n - \frac{n!}{e}\right| < \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1} \leq \tfrac{1}{2} \text{ als } n \geq 1.$$

d_n is dus blijkbaar gelijk aan de afronding van $\frac{n!}{e}$ op het dichtstbijgelegen gehele getal!

Tellen en tellen

P. W. H. Lemmens

Het artikel 'Soms is tellen zo eenvoudig niet' van Drs. W. Kleijne en H. N. Schuring in Euclides 63 (1987/1988), nr. 2 (oktober), p. 56-60, geeft mij aanleiding tot enige opmerkingen. Voor het gemak duid ik dit artikel in het vervolg aan met [KS].
Het is verrassend hoe vaak men in de discrete wiskunde de vage term 'ononderscheidbare objecten' tegenkomt. Eigenlijk is het geen wonder dat hierdoor het tellen zeer bemoeilijkt wordt. Het is dan ook alleszins de moeite waard om eerst eens na te denken over een preciezere formulering van de probleemstelling.

De oorspronkelijke vraag luidt:

> Gegeven n verschillende bakjes en een onbeperkt aantal balletjes, waarvan er k verschillende zijn te onderscheiden, met $1 \leq k \leq n$. Van elke soort zijn er tenminste n balletjes die onderling niet te onderscheiden zijn.
> Op hoeveel manieren kan men in elk bakje precies één balletje doen onder de extra voorwaarde dat van elk van de k verschillende soorten balletjes er tenminste één in een bakje gedaan moet worden?

Wanneer men hier even over nadenkt, en voor $i \in \mathbb{N} - \{0\}$ de verzameling $\{1,2,\ldots,i\}$ aanduidt met E_i, dan blijkt deze vraag veel preciezer en korter te kunnen worden geformuleerd door:

> Hoeveel surjectieve afbeeldingen zijn er van E_n op E_k?

Noemen we dit aantal $A_{n,k}$, dan geldt uiteraard $A_{n,k} = 0$ als $n < k$, $A_{n,k} = n!$ als $n = k$, en verder de recurrente betrekking

$$(*)\ A_{n,k} = k\cdot(A_{n-1,k} + A_{n-1,k-1}) \qquad (n > k)$$

Om (*), welke ook (helaas ongenummerd) voorkomt op pag. 59 van [KS], af te leiden, nemen we het element n van E_n apart. Duidelijk is dat elk element van E_k beeld kan zijn van n. Bij elk van deze k mogelijkheden kan men het aantal surjecties $f\colon E_n \rightarrow E_k$ tellen waarvoor de gegeven $f(n)$ *precies* één keer als beeld voorkomt (dat is $A_{n-1,k-1}$) en ook het aantal surjecties f waarvoor de gegeven $f(n)$ meer dan één keer als beeld voorkomt (dat is $A_{n-1,k}$).
Uitgaande van (*) kan formule (1) van [KS] worden bewezen met volledige inductie. In feite leze men het bewijs van (*) dat in [KS] wordt gegeven in omgekeerde richting.
Mijn tweede opmerking betreft de redenering die in [KS] wordt gevolgd om formule (1) af te leiden.
Deze gedachtengang staat in de discrete wiskunde bekend als het PRINCIPE VAN INCLUSIE EN EXCLUSIE. Gewoonlijk formuleert men dit principe in termen van *eigenschappen*:

Zij E een eindige verzameling (bestaande uit de eigenschappen) en zij X een eindige verzameling van objecten die elk een aantal (ook geen mag) eigenschappen (uit E) hebben. Voor een deelverzameling V van E duiden we met N_V het aantal elementen van X aan dat alle eigenschappen in V heeft (mogelijk meer).
Dan is het aantal objecten van X dat *geen* van de eigenschappen heeft gelijk aan

$$(**) \quad \sum_{V \subset E} (-1)^{|V|} \cdot N_V$$

Hierin staat $|V|$ voor het aantal elementen van V.
(Merk op dat $N_\emptyset = |X|$).

Om nu het aantal surjecties van E_n op E_k te berekenen, nemen we voor X de verzameling van *alle* functies van E_n naar E_k, en laten we E_k tevens fungeren als de verzameling van eigenschappen.
Een functie $f\colon E_n \rightarrow E_k$ heeft eigenschap $i \in E_k$ als i *niet* in het beeld van f voorkomt. Het gevraagde aantal surjecties van E_n op E_k is dus het aantal functies dat geen van de eigenschappen heeft.
Voor $V \subset E_k$ is N_V het aantal functies van E_n naar $E_k - V$. Dus $N_V = |E_k - V|^n = (k - |V|)^n$. Dit aantal hangt dus alleen af van $|V|$. Omdat er $\binom{k}{m}$ deelverzamelingen van E_k zijn met m elementen, kunnen we (**) voor ons geval herschrijven als

$$A_{n,k} = \sum_{m=0}^{k} (-1)^m \binom{k}{m} (k-m)^n$$

hetgeen precies formule (1) van [KS] is.

Verder tellen

Het doet ons bijzonder veel genoegen te ervaren dat diverse lezers van ons artikel 'Soms is tellen zo eenvoudig niet' gereageerd hebben op ons verzoek een vervolg te schrijven.
Verschillende reacties wijzen op facetten die wij niet of nauwelijks hebben aangeroerd en geven nieuwe bewijzen. Bij elkaar vormen ze naar onze mening belangrijke aanvullingen op het geheel.
We zijn de redactie van Euclides dankbaar dat ze tot plaatsing van ons artikel en van reacties daarop is overgegaan.

W. K. & H. N. S.

Literatuur
(opgegeven door K. A. Post)

I. Anderson. *A first course in combinatorial mathematics*. Oxford Clarendon Press 1979.
R. Grimaldi. *Discrete and Combinatorial Mathematics*. Addison Wesley Publishing Company 1985.

Examenbesprekingen georganiseerd door de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Examenbesprekingen wiskunde voor lbo/mavo c en d op vrijdag 20 mei 1988 van 15.00 h tot 18.00 h. te:

	Plaats	School		Gespreksleiders*)
1	ALKMAAR	Bram Daaldermavo Rubenslaan 14 1816 MB Alkmaar 072-11 34 38	1 2	T. Dunselman, Burg. Albertiplein 11, 1561 WH Krommenie, 075-28 40 42 C. Gaykema, Crijnssenstraat 48 III, 1058 XX Amsterdam, 020-12 91 85
2	AMSTERDAM	Osdorper Schoolgemeenschap Hoekenes 61 1068 MR Amsterdam 020-19 83 99	1 2	E. G. Doevendans, C. Bartonstraat 14, 1025 KT Amsterdam, 020-36 20 49 G. H. Dekker, Grote Molensteeg 1, 1135 XL Edam, 02993-7 12 26
3	ARNHEM	Thorbeckescholengemeenschap Thorbeckestraat 17 6828 TS Arnhem 085-42 30 28	1 2	J. F. Laaper, Weerdslag 120, 7206 BW Zutphen L. Hoekstra, Beeklaan 22, 6865 VH Doorwerth, 085-34 25 69
4	EMMEN	Openbare S. G. De Dissel Smedingeslag 1 7824 HK Emmen 05910-2 34 56	1 2	J. W. Schutter, Bladderswijk OZ 68, 7885 TJ Nw. Dordrecht, 05913-1 70 94 J. F. Struik, Liniekampen 12, 7873 BT Odoorn, 05919-1 27 90
5	's-GRAVENHAGE	S. G. Johan de Witt Stadhouderslaan 82 2517 JB 's-Gravenhage 070-54 77 71	1 2	L. C. M. van Wijk, Paviljoensgracht 47, 2512 BL 's-Gravenhage, 070-60 75 95 B. van Klaarbergen, De Perponcherstraat 95, 2518 SP 's-Gravenhage, 070-45 93 03
6	GRONINGEN	Zernike College Parkweg 128 9727 HD Groningen 050-26 03 45	1 2	S. Kooiman, Illegaliteitslaan 11, 9727 EA Groningen, 050-25 12 89 J. C. Borst, Bonenakker 51, 9932 JD Delfzijl, 05960-2 54 64
7	HAAKSBERGEN	R. K. Mavo De Raahorst Van Brakelstraat 1 7482 VV Haaksbergen 05427-1 32 85	1 2	G. Nijenmanting, Verdistraat 22, 7482 TM Haaksbergen, 05427-1 32 13 G. Nijenmanting, Verdistraat 22, 7482 TM Haaksbergen, 05427-1 32 13
8	HOOGEZAND	Dr. A. Jacobsscholengemeenschap Nieuweweg 4 9603 BH Hoogezand 05980-2 68 00	1 2	E. G. van den Handel, Ceresakker 27, 9781 KK Bedum, 05900-1 32 68 W. Visser, Amalia van Solmslaan 11, 9602 GM Hoogezand, 05980-2 03 03

9	LEEUWARDEN	Mavo Nylân Prinsessenweg 4 8931 EG Leeuwarden 058-88 42 02	1 2	F. de Boer, Klaas Kuikenstraat 7, 8802 VB Franeker, 05170-36 10 J. Tuinstra, De Buorren 14, 8408 HH Lippenhuizen, 05133-26 57
10	MIDDELBURG	Oranje Nassau Mavo Oranjelaan 11 4332 VA Middelburg 01180-2 52 74	1 2	C. J. Beimers, Duunmede 49, 4337 BD Middelburg, 01180-3 51 16 A. Kammeraat, Van Strijenstraat 19, 4371 CH Koudekerke, 01185-22 31
11	PANNINGEN	Bouwens van der Boye College Minister Calsstraat 10 5981 VT Panningen 04760-7 30 31	1 2	J. K. M. Verheesen, Brantstraat 13, 6112 AH Sint Joost, 04754-54 87 H. van de Steeg, Langstraat 120, 5801 AG Venray, 04780-8 25 39
12	ROTTERDAM	Chr. Mavoschool Het Lage Land Kromhoutstraat 1 - 7 3067 AE Rotterdam 010-4 20 53 93	1 2	A. B. T. Hazenberg, Kalverdans 27, 2771 RR Boskoop, 01727-3774 L. Bozuwa, Merwekade 90, 3311 TH Dordrecht, 078-14 55 22
13	SITTARD	S. G. Sint Catharina Odasingel 90 6131 GZ Sittard 04490-1 75 86	1 2	E. M. A. M. van der Vring, Wehrerweg 221, 6137 LC Sittard, 04490-1 19 05 J. J. H. Plum, Maastrichterweg 16, 6374 RZ Landgraaf, 045-31 29 08
14	TILBURG	Hogeschool Katholieke Leergangen Pyreneeënweg 3 5022 DN Tilburg 013-39 46 70	1 2	J. P. S. van Swol, Lorentzstraat 76, 4834 XC Breda, 076-65 52 75 F. J. Mahieu, Dommeldal 12, 5282 WC Boxtel, 04116-7 34 68
15	UTRECHT	K. S. G. Mavo/Leao Lunetten Kampereiland 6 3525 CZ Utrecht 030-88 35 51	1 2	J. H. Sybrandy, Berkelwijk 31, 3831 MN Leusden, 033-94 27 70 R. J. Roukema, Spechtenkamp 94 3607 KE Maarssen, 03465-6 04 29
16	ZWOLLE	Thorbeckescholengemeenschap Dr. van Heesweg 1 8025 AB Zwolle 038-54 66 77	1 2	G. J. Scheppink, Merelstraat 102, 7731 XE Ommen, 05291-35 26 S. R. Zwaan, Krulmate 57 A, 8014 KG Zwolle, 038-65 25 30

Examenbesprekingen wiskunde voor havo op vrijdag 20 mei 1988 van 16.00 h tot 18.00 h. te:

	Plaats	School	Gespreksleider
1	AMSTERDAM	Sint Nicolaaslyceum Prinses Irenestraat 21 1077 WT Amsterdam 020-44 51 51	Drs. G. W. Fokkens E. Rooseveltlaan 66 1183 CL Amstelveen 020-43 84 47
2	GRONINGEN	Rölingcollege Melisseweg 2 9731 BM Groningen 050-42 10 00	H. H. C. Pentinga Provincialeweg 13 9771 TA Sauwerd 05909-15 28
3	HENGELO	Twickelcollege Woolderesweg 130 7555 LC Hengelo 074-42 44 25	J. P. Scholten Kemnalanden 1 7542 HL Enschede 053-76 87 91

4	LEEUWARDEN	Stedelijke Scholengemeenschap Dr. Jacob Botkeweg 3 8935 AB Leeuwarden 058-88 23 25	H. Tromp Staniastate 27 8926 LA Leeuwarden 058-77 54 90
5	ROTTERDAM	Citycollege Emmaus Franciscus Beukelsdijk 91 3021 AE Rotterdam 010-4 77 00 33	E. J. van Dongen Walenburgerplein 126 3039 AP Rotterdam 010-4 67 21 30
6	SITTARD	R.K.S.G. Serviam Deken Haenraetsstraat 1 6131 GJ Sittard 04490-1 01 59	J. J. N. M. Salden Absbroekstraat 10 6151 CW Munstergeleen 04490-1 94 79
7	TILBURG	Hogeschool Katholieke Leergangen Pyreneeënweg 3 5022 DN Tilburg 013-39 46 70	F. L. G. Esser De Ruyterstraat 22 5102 BR Dongen 01623-1 64 89

Examenbesprekingen wiskunde voor vwo-B op vrijdag 20 mei 1988 van 18.30 h tot 20.30 h. te:

	Plaats	School	Gespreksleider
1	AMSTERDAM	Sint Nicolaaslyceum Prinses Irenestraat 21 1077 WT Amsterdam 020-44 51 51	S. Th. Min Binnenplaats 35 1695 JJ Blokker 02290-3 77 56
2	GRONINGEN	Rölingcollege Melisseweg 2 9731 BM Groningen 050-42 10 00	C. H. G. Hegeman Coronastraat 62 9742 EH Groningen 050-77 54 90
3	HENGELO	Twickelcollege Woolderesweg 130 7555 LC Hengelo 074-42 44 25	J. C. A. Epping V. Everdingenstraat 42 7165 AK Rietmolen 05452-2 72
4	LEEUWARDEN	Stedelijke Scholengemeenschap Dr. Jacob Botkeweg 3 8935 AB Leeuwarden 058-88 23 25	H. E. Meijer Martena 2 9202 KB Drachten 05120-1 73 76
5	ROTTERDAM	Citycollege Emmaus Franciscus Beukelsdijk 91 3021 AE Rotterdam 010-4 77 00 33	B. Hillebrand Paulus Potterstraat 17 2931 CX Krimpen aan de Lek 01807-1 52 10
6	SITTARD	R.K.S.G. Serviam Deken Haenraetsstraat 1 6131 GJ Sittard 04490-1 01 59	T. Vandeberg Mr. Absilstraat 11 6461 EX Kerkrade 045-45 57 45
7	TILBURG	Hogeschool Katholieke Leergangen Pyreneeënweg 3 5022 DN Tilburg 013-39 46 70	A. L. P. van Merode Kerkstraat 8 5101 BC Dongen 01623-1 37 46

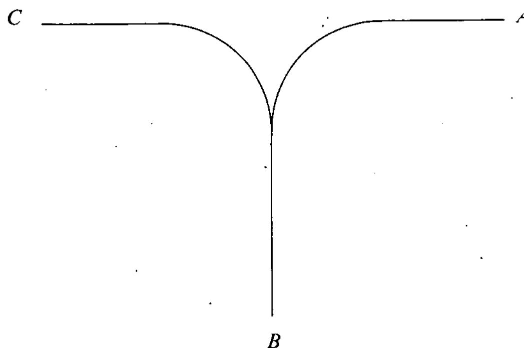
Examenbesprekingen wiskunde voor vwo-A op dinsdag 31 mei 1988 van 16.00 h tot 18.00 h. te:

	Plaats	School	Gespreksleider
1	AMSTERDAM	Sint Nicolaaslyceum Prinses Irenestraat 21 1077 WT Amsterdam 020-44 51 51	C. Lagerwaard V. Wassenaarstraat 28 2361 KJ Warmond 01711-1 10 19
2	ARNHEM	Thorbeckescholengemeenschap Thorbeckestraat 17 6828 TS Arnhem 085-42 30 28	Drs. W. H. M. Kremers De Haantjes 55 6666 DP Heteren 08306-2 26 07
3	BUSSUM	Goois Lyceum Vossiuslaan 2 A 1401 RT Bussum 02159-3 32 94	L. Sijp Stargardlaan 3 1404 BC Bussum 02159-4 41 82
4	GOES	Buys Ballotcollege Bergweg 4 4461 NB Goes 01100-1 30 10	Drs. S. H. P. Garst Kerkring 32 3255 AH Oude Tonge 01874-21 77
5	GRONINGEN	Mathematisch Instituut W. S. N.-gebouw Landleven 5 9747 AD Groningen 050-63 39 69	Drs. M. van Steenis Kamplaan 8 9301 KK Roden 05908-1 81 21
6	LEEUWARDEN	Stedelijke Scholengemeenschap Dr. Jacob Botkeweg 3 8935 AB Leeuwarden 058-88 23 25	E. C. Scholl Mr. P. J. Troelstraweg 105 8916 CP Leeuwarden 058-13 77 69
7	ROTTERDAM	Citycollege Emmaus Franciscus Beukelsdijk 91 3021 AE Rotterdam 010-4 77 00 33	Drs. J. W. Maassen Traviatastraat 132 2555 VJ 's-Gravenhage 070-68 79 98
8	SITTARD	R.K.S.G. Serviam Deken Haenraetsstraat 1 6131 GJ Sittard 04490-1 01 59	W. J. M. Laaper Burghplein 8 5614 BA Eindhoven 040-12 33 54
9	TILBURG	Hogeschool Kath. Leergangen Pyreneeënweg 3 5022 DN Tilburg 013-39 46 70	Drs. J. J. Verboom Schotsehooglanderstraat 4 5168 AG Waspik
10	ZWOLLE	Chr. Hogeschool Windesheim Campus 2 - 6 8017 CA Zwolle 038-69 92 50	Drs. A. Breeman Snavel van Emekamp 47 8014 CW Zwolle 038-65 72 57

Voor alle examenbesprekingen geldt dat de door de CEVO vastgestelde normen ***niet*** *gewijzigd mogen worden. Binnen de geldende normen kan men verfijningen afspreken.*

Recreatie

Nieuwe opgaven met oplossingen en correspondentie over deze rubriek aan Dr P. G. J. Vredenduin, Dillenburg 148, 6865 HN Doorwerth.



588. De familie Jansen is 25 jaar getrouwd. Ze hebben zeven buren die ze in de feestvreugde willen laten delen, de echtparen Van Aalst, Benschop, Campagne, Dirkzwager, Van Eisden, Ferguson en De Gavere.
Jansen is ietwat schriel en hij maakt daarom lootjes, genummerd van 1 tot 700 onder weglating van de zevenvouden. De zeven buren trekken elk een lot. Het stel van twee of meer buren waarvan de som van de loten deelbaar is door 7, mag met de familie Jansen mee uit eten gaan. Zijn er meer dergelijke stellen, dan mag het stel dat zich het eerst meldt, mee gaan.

a Is het zeker dat er een stel is waarvan de som van de loten deelbaar is door 7?

b Jansen bemerkt met schrik dat hij toch misschien wel alle buren mee krijgt. Hoe groot is de kans daarop?

c Jansen probeert de schade beperkt te houden. Hij stelt als extra voorwaarde, dat het aantal buren dat mee gaat eten, zo klein mogelijk moet zijn, zogenaamd om de intimiteit te bevorderen. Hoe groot is de kans dat er maar twee echtparen de Jansens vergezellen?

589. Frank Laforce besprak op de twaalfde gemeenschappelijke studiedag van de VVWL en de NVvW het volgende rangeerprobleem. In *A* bevinden zich een aantal, bijv. acht, wagons, genummerd 1, 2, 3, ..., 8 (van links naar rechts). Deze worden via *B* overgebracht naar *C*. Er zijn slechts twee handelingen toegestaan: een aantal wagons tegelijk transporteren van *A* naar *B* en een aantal tegelijk transporteren van *B* naar *C*. Op hoeveel manieren is dit mogelijk? Anders gezegd: hoeveel verschillende permutaties van de wagons 1 t.m. 8 kunnen hiervan het resultaat zijn? (*Figuur* 1)
Onderstel in *A* bevinden zich de wagons 1 2 3 ... 14 15. Is het mogelijk deze zo te transporteren dat in *C* de permutatie 5 4 8 10 9 7 12 11 6 3 15 14 13 2 1 (weer van links naar rechts) resulteert?

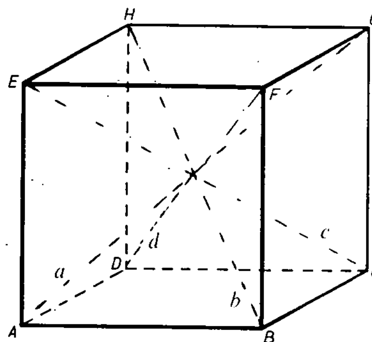
Oplossingen van nummer 589 binnen een maand na verschijnen van dit nummer aan mij toe te sturen.

Oplossingen

581. De 48 isometrieën van de kubus zijn gevonden door Bert Holleman (Monnickendam) en Dick Buijs (Kerk-Avezaath), althans alleen zij hebben daarvan mededeling gedaan. Hier volgt de oplossing van Bert Holleman.
Er is een verwantschap tussen de isometrieën van de kubus en de permutaties van hun lichaamsdiagonalen.
Bij elke isometrie hoort een permutatie.
Bij twee isometrieën hoort dezelfde permutatie dan en alleen dan als ze verschillen in een puntspiegeling in het centrum *O* van de kubus.
Een verwisseling van twee lichaamsdiagonalen wordt bewerkstelligd door een vlakspiegeling. Bijv. de verwisseling van *a* en *c* door de spiegeling in vlak *BFHD*. En dus kan elke permutatie van de lichaamsdiagonalen bewerkstelligd worden door een isometrie.

Er zijn 24 permutaties van de lichaamsdiagonalen en dus zijn er 48 isometrieën van de kubus. We gaan deze klassificeren uitgaande van de permutaties.
Permutatie type (*ab*), d.w.z. *a* en *b* worden verwisseld en de overige zijn invariant.

A Hiermee corresponderen zes spiegelingen in de diagonaalvlakken.



3 En deze spiegelingen elk gevolgd door een puntspiegeling in O, dus zes lijnspiegelingen in de normalen door O op de diagonaalvlakken.
Type $(abcd)$.

C Dit geeft zes draaiingen over $\pm 90°$ om de loodlijnen door O op de zijvlakken.

D En zes draaispiegelingen die bestaan uit een van de bovengenoemde rotaties gevolgd door een spiegeling in het vlak door O loodrecht op de rotatieas. (U ziet dit als u de rotatie en de puntspiegeling in O ontbindt in totaal vijf vlakspiegelingen.)
Type (abc).

E Dit geeft acht draaiingen over $\pm 120°$ in de lichaamsdiagonalen.

F En acht draaispiegelingen die bestaan uit een draaiing over $\pm 60°$ in een lichaamsdiagonaal gevolgd door een spiegeling in het vlak door O loodrecht op deze lichaamsdiagonaal.
Type $(ab)(cd)$

G Dit geeft drie lijnspiegelingen in de lijnen door O loodrecht op de zijvlakken.

H En drie vlakspiegelingen in de vlakken door O evenwijdig aan de zijvlakken.

I De identieke permutatie ten slotte geeft de identieke isometrie

J en de puntspiegeling in O.

Hoeveel spiegelingen en hoeveel draaiingen zijn hierbij? Onder een spiegeling versta ik een isometrie die samengesteld is uit een oneven aantal vlakspiegelingen en onder een draaiing een die samengesteld is uit een even aantal draaiingen. De spiegelingen vindt men dan sub A, D, F, H en J; de draaiingen sub B, C, E, G en I.

Dat het er evenveel zijn ziet men direct door op te merken dat een spiegeling gevolgd door een puntspiegeling een draaiing geeft en een draaiing gevolgd door een puntspiegeling een spiegeling. Want een puntspiegeling bestaat uit drie vlakspiegelingen.

586. Een convex veelvlak heeft r ribben. Hoeveel plakrandjes zijn minimaal resp. maximaal nodig om vanuit een uitslag het veelvlak te reconstrueren?

Bij het maken van een uitslag begint men met één zijvlak. Aan dit zijvlak wordt een tweede zijvlak vastgemaakt, d.w.z. het blijft er door middel van één ribbe mee verbonden. Een derde zijvlak blijft met één van deze twee zijvlakken door één ribbe verbonden. Enz. Onderstel het veelvlak heeft z zijvlakken. In de uitslag zijn deze door $z-1$ ribben verbonden. De overige $r-z+1$ ribben zijn dus losgemaakt en moeten van een plakrandje voorzien worden.

Blijft over de vraag: als een convex veelvlak r ribben heeft, hoeveel zijvlakken heeft het dan maximaal resp. minimaal?

Het aantal zijvlakken is zo groot mogelijk als elk van de zijvlakken een minimaal aantal ribben heeft. Dit kan 3 zijn. Dit is het geval bij een regelmatig viervlak en bij elk veelvlak dat daaruit ontstaat door er telkens weer een regelmatig viervlak aan vast te plakken.

Zo krijgt men achtereenvolgens:

z	r	h	(aantal hoekpunten)
4	6	4	
6	9	5	
8	12	6	
10	15	7	enz.

Hoe krijgt men nu een convex veelvlak met maximaal aantal zijvlakken en $r = 11$? Ga uit van bovenstaand veelvlak met 12 ribben. Vervang twee aangrenzende driehoeken door één vierhoek. Dan vervalt er één ribbe en één zijvlak en blijft het aantal hoekpunten hetzelfde.

Om $r = 10$ te verkrijgen, voert men deze operatie nog eens uit. Zo krijgen we de volgende mogelijkheden:

h	z	r		z	r		z	r	
4	4	6							
5	6	9	→	5	8				
6	8	12	→	7	11	→	6	10	
7	10	15	→	9	14	→	8	10	enz.

Zodat we vinden:

r	max. z	min. aantal plakbandjes
$3n$	$2n$	$n+1$
$3n-1$	$2n-1$	$n+1$
$3n-2$	$2n-2$	$n+1$

Nu het maximale aantal. Eerst een uitstapje. Bekend is hoe men uit een regelmatig 20-vlak een regelmatig 12-vlak kan doen ontstaan. Kies als nieuwe hoekpunten de middelpunten van de oude zijvlakken. Elk zijvlak wordt dan vervangen door een hoekpunt en ook elk hoekpunt door een zijvlak.

Meer algemeen geldt voor convexe veelvlakken het volgende dualiteitsprincipe: als er een veelvlak mogelijk is met $z = a$, $h = b$ en $r = c$, dan is er ook een veelvlak mogelijk is met $z = b$, $h = a$ en $r = c$.

We keren terug naar de plakrandjes. Hierboven vonden we:

r	max. z	en dus	min. h
$3n$	$2n$		$n+2$
$3n-1$	$2n-1$		$n+2$
$3n-2$	$2n-2$		$n+2$

Het dualiteitsprincipe levert nu:

r	min. z	max. aantal plakbandjes
$3n$	$n+2$	$2n-1$
$3n-1$	$n+2$	$2n-2$
$3n-2$	$n+2$	$2n-3$

Zijn alle tussengelegen waarden voor z en dus voor het aantal plakrandjes realiseerbaar? Dirk Kruyswijk heeft me meegedeeld dat dit inderdaad het geval is. Een bewijs hiervoor heb ik niet gevonden. Als iemand een bewijs vindt, houd ik mij aanbevolen. Neemt het niet te veel ruimte in beslag, dan zal ik het graag opnemen.

Kalender

13 mei 1988: Utrecht, Van der Blij 65
27 juli-3 aug. 1988: Budapest, ICME-Congres
29 oktober 1988: Bilthoven, Jaarvergadering/Studiedag NVvW

Inhoud

Adressen van auteurs

J. Haubrich, Aeneaslaan 21, 5631 LA Eindhoven

M. C. van Hoorn, Postbus 9025, 9703 LA Groningen

P. W. H. Lemmens, p/a Math. Instituut, Postbus 80010, 3508 TA Utrecht

J. ter Pelle, p/a SLO, Postbus 2041, 7500 CA Enschede